Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică – informatică

MODEL

- **Toate subiectele (I, II şi III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinaţi partea reală a numărului complex $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Calculaţi $(f\circ f)(512)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\cos 2x+\sin x=0$.

5p **4.** Se consideră mulţimea $M=\{0,1,2,3,4,5\}$. Determinaţi numărul tripletelor (a,b,c) cu proprietatea că $a,b,c\in M$ şi $a<b<c$.

5p **5.** Calculaţi distanţa dintre dreptele paralele de ecuaţii $x+2y=6$ şi $2x+4y=11$.

5p **6.** Paralelogramul $ABCD$ are $AB=1$, $BC=2$ şi $m\left(\sphericalangle BAD\right)=60^\circ$. Calculaţi produsul scalar $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru $a,b,c\in\mathbb{R}^*$, se consideră sistemul $\begin{cases} ax+by+cz=b \\ cx+ay+bz=a \\ bx+cy+az=c \end{cases}$, $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătaţi că determinantul sistemului este $\Delta=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

5p **b)** Rezolvaţi sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p **c)** Ştiind că $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$, arătaţi că sistemul are o infinitate de soluţii (x,y,z), astfel încât $x^2+y^2=z-1$.

2. Se consideră mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix} \middle|\ a,b,c\in\mathbb{Z}_4\right\}$.

5p **a)** Determinaţi numărul elementelor mulţimii G.

5p **b)** Daţi un exemplu de matrice $A\in G$ cu proprietatea că $\det A\neq\hat{0}$ şi $\det A^2=\hat{0}$.

5p **c)** Determinaţi numărul soluţiilor ecuaţiei $X^2=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X\in G$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

5p **a)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **b)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=|\sin nx|$ şi numerele $I_n=\int_\pi^{2\pi}\dfrac{f_n(x)}{x}dx$.

5p **a)** Calculați $\int_0^\pi f_2(x)dx$.

5p **b)** Arătați că $I_n\le\ln 2$.

5p **c)** Arătați că $I_n\ge\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{2n}\right)$.

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la matematică
Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

MODEL

- **Se punctează oricare alte formulări/ modalități de rezolvare corectă a cerințelor.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit prin barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$	**2p**
	$z^6=2^6\cdot\left(\cos\frac{6\pi}{6}+i\sin\frac{6\pi}{6}\right)=-2^6\Rightarrow \operatorname{Re} z^6=-64$	**3p**
2.	$f(512)=\frac{1}{8}$	**2p**
	$(f\circ f)(512)=f\left(\frac{1}{8}\right)=2$	**3p**
3.	Ecuația devine $2\sin^2 x-\sin x-1=0$, cu soluțiile $\sin x=-\frac{1}{2}$ şi $\sin x=1$.	**3p**
	Obținem $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, sau $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.	**2p**
4.	Numărul cerut este egal cu numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii M	**3p**
	Acesta este $C_6^3=20$.	**2p**
5.	Punctul $A(0,\ 3)$ se află pe prima dreaptă.	**2p**
	Distanța este $\mathrm{d}(A,\ d_2)=\frac{\lvert 2\cdot 0+4\cdot 3-11\rvert}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{1}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$.	**3p**
6.	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2$	**3p**
	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1\cdot 2\cdot\cos 60^\circ=1$	**1p**
	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=1+2^2=5$	**1p**

SUBIECTUL al II - lea (30 de puncte)

1.a)	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$	**2p**

	$\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$, de unde rezultă concluzia	**3p**
b)	Observăm că $x=0,\ y=1,\ z=0$ verifică sistemul. Cum soluția este unică, aceasta este soluția căutată.	**3p** **2p**
c)	$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(c-b)^2=0 \Leftrightarrow a=b=c$. Sistemul are o infinitate de soluții de forma $x=\alpha, y=\beta,\ z=1-\alpha-\beta$. Putem lua $\beta=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1-4\alpha^2-4\alpha})$, cu $4\alpha^2+4\alpha-1\le 0$.	**2p** **2p** **1p**
2.a)	a, b, c pot lua fiecare 4 valori Avem $4^3=64$ matrice.	**3p** **2p**
b)	Luăm $A=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$ $\det(A)=\hat{2},\ \det(A^2)=\hat{0}$	**3p** **2p**
c)	$X=\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix} \Rightarrow X^2=\begin{pmatrix} a^2 & b(a+c) \\ \hat{0} & c^2 \end{pmatrix}$ Ecuația devine $a^2=\hat{1}$, $b(a+c)=\hat{0}, c^2=\hat{0}$. Obținem $a\in\{\hat{1},\hat{3}\}, c\in\{\hat{0},\hat{2}\}, b=\hat{0}$, deci există 4 soluții	**2p** **1p** **2p**

SUBIECTUL al III - lea (30 de puncte)

1.a)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1 \Rightarrow m=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=0$, deci avem asimptota oblică $y=x$.	**2p** **3p**
b)	$f'(x)=\frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+1)}{(x+1)^2}$ $f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$	**3p** **2p**
c)	$f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}$ $f''(x)<0, \forall x\in(-\infty,-1)$, deci f este concavă pe $(-\infty,-1)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^\pi \lvert\sin 2x\rvert dx=\int_0^{\pi/2}\sin 2x dx-\int_{\pi/2}^{\pi}\sin 2x dx$ $I=\frac{-\cos 2x}{2}\Big\vert_0^{\pi/2}+\frac{\cos 2x}{2}\Big\vert_{\pi/2}^{\pi}$ $I=2$	**2p** **2p** **1p**
b)	$I_n=\int_\pi^{2\pi}\frac{f_n(x)}{x}dx\le\int_\pi^{2\pi}\frac{1}{x}dx$ $\int_\pi^{2\pi}\frac{1}{x}dx=\ln x\vert_\pi^{2\pi}=\ln 2$	**3p** **2p**
c)	$I_n=\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\lvert\sin t\rvert}{t}dt$	**1p**

	$I_n = \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{\lvert \sin t \rvert}{t} dt + \int_{n\pi+\pi}^{n\pi+2\pi} \frac{\lvert \sin t \rvert}{t} dt + ... + \int_{2n\pi-\pi}^{2n\pi} \frac{\lvert \sin t \rvert}{t} dt$	**2p**
	$I_n \geq \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \lvert \sin t \rvert dt + \frac{1}{\pi(n+2)} \int_{n\pi+\pi}^{n\pi+2\pi} \lvert \sin t \rvert dt + ... + \frac{1}{2n\pi} \int_{2n\pi-\pi}^{2n\pi} \lvert \sin t \rvert dt$	**1p**
	Din $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \lvert \sin t \rvert dt = 2, \forall k \in \mathbb{Z}$ rezultă concluzia.	**1p**

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

MODEL

- **Toate subiectele (I, II şi III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 = 3$ şi $a_3 = 7$. Calculați suma primilor 10 termeni ai progresiei.

5p **2.** Determinați numerele reale m pentru care punctul $A(m,-1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x+3) = 2$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu 3 elemente ale unei mulțimi care are 5 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(1,2)$ şi $C(2,-1)$. Calculați distanța de la punctul C la mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB = 8$, $AC = 8$ şi $m(\sphericalangle BAC) = 30^\circ$. Calculați aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi funcția $f:\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(X) = X^2 - 3X + I_3$, unde $X^2 = X\cdot X$.

5p **a)** Calculați $\det(I_3 + B)$.

5p **b)** Demonstrați că $f(A) = I_3 + B$.

5p **c)** Arătați că $(f(A))^3 = I_3 + 3B + 3B^2$, unde $(f(A))^3 = f(A)\cdot f(A)\cdot f(A)$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x * y = x + y - 3$ şi $x \circ y = (x-3)(y-3) + 3$.

5p **a)** Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x\circ x = x * x$.

5p **b)** Determinați numărul întreg a care are proprietatea că $x \circ a = 3$, oricare ar fi numărul întreg x.

5p **c)** Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} x * (y+1) = 4 \\ (x-y)\circ 1 = 5 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$.

5p **a)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției f.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\, dx$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la matematică

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințe ale naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

MODEL

- **Se punctează oricare alte formulări/ modalități de rezolvare corectă a cerințelor.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit prin barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ r = 2 \end{cases}$	**2p**
	$a_{10} = 21$	**1p**
	$S_{10} = \dfrac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = 120$	**2p**
2.	$A(m,-1) \in G_f \Leftrightarrow f(m) = -1 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 1 = -1$	**3p**
	$m = 2$ sau $m = 1$	**2p**
3.	$2x + 3 > 0 \Rightarrow x \in \left(-\dfrac{3}{2}, \infty\right)$	**1p**
	$2x + 3 = 25 \Rightarrow x = 11 \in \left(-\dfrac{3}{2}, \infty\right)$	**4p**
4.	$C_5^3 =$	**3p**
	$= 10$	**2p**
5.	Fie M mijlocul segmentului $AB \Rightarrow M(0,0)$	**2p**
	Scrierea formulei distanței dintre 2 puncte	**1p**
	$CM = \sqrt{5}$	**2p**
6.	Aria $\Delta ABC = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} =$	**2p**
	$= \dfrac{8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 16$	**3p**

SUBIECTUL al II - lea (30 de puncte)

1.a)	$I_3 + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	**2p**
	$\det(I_3 + B) = 1$	**3p**

b)	$A^2=\begin{pmatrix}9&6&7\\0&9&6\\0&0&9\end{pmatrix}$ $f(A)=A^2-3A+I_3=$ $=I_3+B$	**2p** **1p** **2p**
c)	$\left(f(A)\right)^3=\left(I_3+B\right)^3=I_3+3B+3B^2+B^3$ $B^3=O_3$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
2.a)	$(x-3)^2-2(x-3)=0$ $(x-3)(x-5)=0$ $x=3$ sau $x=5$	**2p** **1p** **2p**
b)	$(x-3)(a-3)+3=3$ $a=3\in\mathbf{Z}$	**2p** **3p**
c)	$\begin{cases}x+y=6\\(x-y-3)(-2)=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III - lea (30 de puncte)

1.a)	$\left(x^3\right)'=3x^2$ $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
b)	$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$ $f'(1)=0$	**3p** **2p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=1, x_2=-1$ Din tabelul de variație rezultă f crescătoare pe $(-\infty,-1]$ și pe $[1;+\infty)$ și f descrescătoare pe $[-1;0)$ și pe $(0;1]$	**1p** **2p** **2p**
2.a)	$V=\pi\int_0^1 f^2(x)\,dx=\pi\int_0^1 x^2\left(2-x^2\right)dx=$ $=\pi\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big\vert_0^1=$ $=\frac{7\pi}{15}$.	**1p** **2p** **2p**
b)	$\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int_2^1\sqrt{t}\,dt=$	**3p**

	$=\frac{t\sqrt{t}}{3}\Big\|_1^2=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$	**2p**
c)	$\int_0^x f(t)\,dt=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\left(2-x^2\right)\sqrt{2-x^2}}{3}$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\left(2-x^2\right)\sqrt{2-x^2}}{3}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2-x^2}}{3}\cdot(-2x)}{2x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la matematică
Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător- educatoare

MODEL

- **Toate subiectele (I, II şi III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^2-4x+3=0$.
5p **2.** Calculați suma $S=1+2+3+\ldots+40$.
5p **3.** Determinați valorile parametrului real m astfel încât ecuația $x^2-4mx+1=0$ să aibă soluții reale.
5p **4.** Calculați distanța de la punctul $A(1,2)$ la dreapta $d: x+y+1=0$.
5p **5.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $7^{2x}-8\cdot7^x+7=0$.
5p **6.** Calculați $\frac{1}{2}\cos135^\circ+3\sin135^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziție $x*y=xy+2x+2y+a$, cu $a\in\mathbb{Z}$.
5p **a)** Determinați $a\in\mathbb{Z}$ ştiind că legea "$*$" admite element neutru.
5p **b)** Pentru $a=2$ demonstrați că legea "$*$" este asociativă.
5p **c)** Dacă $a=2$ arătați că $(x+y+2)*z=(x*z)+(y*z)+2$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{Z}$.
5p **d)** Pentru $a=2$ determinați mulțimea $M=\{x\in\mathbb{Z} \mid \text{există } x'\in\mathbb{Z}, \text{ astfel încât } x*x'=-1\}$.
5p **e)** Pentru $a=2$ determinați $x,y\in\mathbb{Z}$, astfel încât $x*y=3$.
5p **f)** Fie mulțimea $H=\{-3,-1\}$. Determinați $a\in\mathbb{Z}$ astfel încât, pentru oricare $x,y\in H$, să rezulte că $x*y\in H$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Fie numerele reale a,b,c şi determinantul $D=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}$.

5p **a)** Pentru $a=1,\ b=2$ şi $c=3$, calculați determinantul D.
5p **b)** Arătați că dacă $a=b$, atunci $D=0$.
5p **c)** Pentru $b=2$ şi $c=3$, determinați $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $D=2$.
5p **d)** Demonstrați că $D=(b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)$.
5p **e)** Arătați că dacă $D=0$, atunci cel puțin două dintre numerele $a,\ b$ şi c sunt egale.
5p **f)** Arătați că dacă $a,b,c\in\mathbb{Z}$, atunci D este număr întreg par.

Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la matematică
Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător- educatoare

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

MODEL

- **Se punctează oricare alte formulări/ modalități de rezolvare corectă a cerințelor.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare, altele decât cele precizate explicit prin barem. Nu se acordă fracțiuni de punct.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului total acordat pentru lucrare la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1)	$x^2-4x+3=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=3$	**2p**
	Finalizare: $P=\frac{2}{5}$	**3p**
2)	$1+2+3+\ldots+40=\frac{40\cdot 41}{2}=$	**3p**
	$=820$	**2p**
3)	$\Delta=16m^2-4$	**2p**
	$m\in\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},\ +\infty\right)$	**3p**
4)	Scrierea formulei	**3p**
	$d(A,d)=\frac{\lvert 1+2+1\rvert}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$	**2p**
5)	$7^x=y$; $y^2-8y+7=0$	**1p**
	$y_1=1\Rightarrow x_1=0$	**2p**
	$y_2=7\Rightarrow x_2=1$	**2p**
6)	$\cos 135^\circ=-\cos 45^\circ$; $\sin 135^\circ=\sin 45^\circ$	**2p**
	Finalizare: $\frac{1}{2}\cos 135^\circ+3\sin 135^\circ=\frac{5\sqrt{2}}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II - lea (30 de puncte)

a)	Din definiția elementului neutru şi cum legea este comutativă, avem $x*e=x$, $\forall x\in\mathbb{Z}$	**1p**
	$(e+2)x+2e+a=x$, $\forall x\in\mathbb{Z}$ de unde $\begin{cases} e+2=1 \\ 2e+a=0 \end{cases}$	**2p**
	Deci $a=2$ şi $e=-1$.	**2p**
b)	$(x*y)*z=x*(y*z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{Z}$	**1p**
	$(x*y)*z=xyz+2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)+6$	**2p**
	$x*(y*z)=xyz+2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)+6$	**2p**
c)	$x*y=(x+2)(y+2)-2\Rightarrow(x+y+2)*z=(x+y+4)(z+2)-2$	**2p**

	$\left(x*z\right)+\left(y*z\right)+2=(x+2)(z+2)-2+(y+2)(z+2)-2+2=$ $=(x+y+4)(z+2)-2=\left(x+y+2\right)*z$	2p 1p
d)	Din $x*x'=(x+2)(x'+2)-2=-1$, rezultă $x'=-2+\dfrac{1}{x+2}\in\mathbb{Z}$ pentru $x\in\mathbb{Z}$ $(x+2)\mid 1$, adică $(x+2)\in\left\{-1,1\right\}$ $M=\left\{-3,-1\right\}$	2p 2p 1p
e)	Din $x*y=3$ se obține $(x+2)(y+2)=5$ Finalizare: $\left(x;y\right)\in\left\{\left(-1;3\right),\left(-3;-7\right),\left(3,-1\right),\left(-7;-3\right)\right\}$	1p 4p
f)	$(-3)*(-3)=a-3=(-1)*(-1)\in\left\{-3,-1\right\}\Rightarrow a\in\left\{0,2\right\}$ $(-3)*(-1)=(-1)*(-3)=a-5\in\left\{-3,-1\right\}\Rightarrow a\in\left\{2,4\right\}$ $a=2$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III - lea (30 de puncte)

a)	$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}$ Finalizare: $D=2$	2p 3p
b)	$a=b\Rightarrow D=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&a&a^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}$ Finalizare: $D=0$	2p 3p
c)	$D=a^2-5a+6$ $D=2\Rightarrow a^2-5a+4=0$ $a=1$ sau $a=4$	2p 1p 2p
d)	Scăzând prima linie din celelalte două obținem $D=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\0&b-a&b^2-a^2\\0&c-a&c^2-a^2\end{vmatrix}$ $D=\left(b-a\right)\left(c-a\right)\cdot\begin{vmatrix}1&a&a^2\\0&1&b+a\\0&1&c+a\end{vmatrix}=\left(b-a\right)\left(c-a\right)\left(c-b\right)$	2p 3p
e)	$D=\left(b-a\right)\left(c-a\right)\left(c-b\right)=0\Rightarrow b-a=0$ sau $c-a=0$ sau $c-b=0$ Finalizare	3p 2p
f)	Dintre cele 3 numere întregi *a*, *b*, *c*, cel puțin două au aceeaşi paritate, deci diferența lor este număr par. Dar cum $D=\left(b-a\right)\left(c-a\right)\left(c-b\right)$ rezultă că D este număr par	3p 2p

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.
- **Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați $\left((1-i)(i-1)\right)^4$.

5p **2.** Arătați că funcția $f:(-3,3)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\dfrac{3-x}{3+x}$ este impară.

5p **3.** Determinați soluțiile întregi ale inecuației $x^2+2x-8<0$.

5p **4.** Câte elemente din mulțimea $A=\{1,2,3,...,100\}$ sunt divizibile cu 4 sau cu 5?

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $M(1,-2)$, $N(-3,-1)$ şi $P(-1,2)$. Determinați coordonatele punctului Q astfel încât $MNPQ$ să fie paralelogram.

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB=6,\ AC=3$ şi $BC=5$. Calculați lungimea înălțimii $[AD]$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie sistemul $\begin{cases} x-2y-8z=-65 \\ 3x+y-3z=22 \\ x+y+z=28 \end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$ şi matricea asociată sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că rangul matricei A este egal cu 2.

5p **b)** Rezolvați sistemul în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați numărul soluțiilor sistemului din mulțimea $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

2. Fie mulțimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle|\ a,b\in\mathbb{Z}_5\right\}$.

5p **a)** Determinați numărul elementelor mulțimii A.

5p **b)** Arătați că există o matrice nenulă $M\in A$ astfel încât $\begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix}\cdot M=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea A ecuația $X^2=I_2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}$.

5p **a)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **b)** Studiați monotonia funcției *f*.

5p **c)** Determinați punctele de inflexiune ale funcției *f*.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{2x-1}{x}dx$.

5p **a)** Arătați că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

5p **b)** Arătați că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} n(2-I_n)$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

BAREM DE CORECTARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$\left((1-i)(i-1)\right)^4=(2i)^4=$	**3p**
	$=16$	**2p**
2.	$f(-x)=\ln\frac{3+x}{3-x}=$	**2p**
	$=\ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{-1}=-\ln\frac{3-x}{3+x}=$	**2p**
	$=-f(x)$	**1p**
3.	$x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$	**2p**
	$x\in(-4,2)$	**1p**
	$(-4;2)\cap\mathbb{Z}=\{-3,-2,-1,0,1\}$	**2p**
4.	25 de numere sunt divizibile cu 4	**1p**
	20 de numere sunt divizibile cu 5	**1p**
	5 numere sunt divizibile cu 4 şi cu 5	**1p**
	Deci 40 de numere sunt divizibile cu 4 sau cu 5	**2p**
5.	Fie $Q(a,b)$. Avem $\overrightarrow{MQ}=(a-1)\vec{i}+(b+2)\vec{j}$ şi $\overrightarrow{NP}=2\vec{i}+3\vec{j}$	**2p**
	$MNPQ$ este paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP} \Leftrightarrow a-1=2$ şi $b+2=3$	**2p**
	Punctul căutat este $Q(3,\ 1)$	**1p**
6.	$A_{ABC}=2\sqrt{14}$	**3p**
	$AD=\frac{4\sqrt{14}}{5}$	**2p**

SUBIECTUL II **30 de puncte**

1.a)	$\det(A)=0$	**3p**
	$\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=7$ (sau orice alt minor de ordinul 2 nenul), deci rangul matricei A este 2	**2p**
b)	Minorul caracteristic este nul, deci sistemul este compatibil nedeterminat	**2p**
	De exemplu, luând $z=\alpha$ necunoscută secundară se obține $x=2\alpha-3,\ y=31-3\alpha,\ z=\alpha$	**3p**
c)	$x=2\alpha-3\geq 0,\ y=31-3\alpha\geq 0,\ z=\alpha\geq 0\Rightarrow$	**1p**
	$\frac{3}{2}\leq\alpha\leq\frac{31}{3}$	**2p**
	$\alpha\in\{2,3,4,...,10\}$	**1p**
	Sunt 9 soluții în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$	**1p**
2.a)	$a,b\in\mathbb{Z}_5$ şi card $\mathbb{Z}_5=5$	**2p**
	Deci mulțimea A are 25 de elemente	**3p**

b)	$\begin{pmatrix}\hat{3} & \hat{1}\\ -\hat{1} & \hat{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{3}a-b & \hat{3}b+a\\ -a-\hat{3}b & -b+\hat{3}a\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix}\hat{3}a-b & \hat{3}b+a\\ -a-\hat{3}b & -b+\hat{3}a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$ dacă $\hat{3}a=b$ şi $\hat{3}b=-a$	**1p**
	Un exemplu: $M=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{3}\\ -\hat{3} & \hat{1}\end{pmatrix}$	**2p**
c)	Dacă $X=\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}$ atunci $X^2=I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x^2-y^2 & \hat{2}xy\\ -\hat{2}xy & x^2-y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix} \Leftrightarrow x^2-y^2=\hat{1}$ şi $xy=\hat{0}$	**1p**
	Dacă $x=\hat{0}\Rightarrow y^2=\hat{4}\Rightarrow y\in\{\hat{2};\hat{3}\}$; dacă $y=\hat{0}\Rightarrow x^2=\hat{1}\Rightarrow x\in\{\hat{1};\hat{4}\}$	**2p**
	Obținem matricele $\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{2}\\ -\hat{2} & \hat{0}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{3}\\ -\hat{3} & \hat{0}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\hat{4} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{4}\end{pmatrix}$	**2p**

SUBIECTUL III **30 de puncte**

1.a)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\frac{\pi}{4}$	**3p**
	Deci $y=\frac{\pi}{4}$ este asimptota orizontală spre $+\infty$.	**2p**
b)	$f'(x)=\frac{1}{2x^2+2x+1}$	**2p**
	$2x^2+2x+1>0$ pentru orice x real, deci $f'(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	**2p**
	Funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty,-1)$ şi pe $(-1,+\infty)$	**1p**
c)	$f''(x)=\frac{-2(2x+1)}{\left(2x^2+2x+1\right)^2},\ x\neq -1$	**2p**
	$f''(x)=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$	**1p**
	Din tabelul de variație rezultă că $x=-\frac{1}{2}$ este punct de inflexiune al funcției f	**2p**
2.a)	$I_n=\int\limits_n^{n+1}\left(2-\frac{1}{x}\right)dx=\left(2x-\ln x\right)\Big\|_n^{n+1}=2-\ln\frac{n+1}{n}$	**2p**
	$I_{n+1}-I_n=\ln\frac{n+1}{n}-\ln\frac{n+2}{n+1}=$	**1p**
	$=\ln\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\ln\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=\ln\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, deci şirul este strict crescător	**2p**
b)	$1<\frac{n+1}{n}\le 2<e\Rightarrow 0<\ln\frac{n+1}{n}<1$	**2p**
	$1<2-\ln\frac{n+1}{n}<2$	**2p**
	$1<I_n<2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, deci şirul este mărginit	**1p**
c)	$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(2-I_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\frac{n+1}{n}=$	**2p**

	$=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\ln e=1$	**3p**

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Care dintre numerele $2\sqrt[3]{6}$ și $3\sqrt[3]{3}$ este mai mare?

5p **2.** Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$.

5p **3.** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $x^2-x+m^2=0$ are două soluții reale egale.

5p **4.** Determinați numărul termenilor raționali din dezvoltarea $\left(1+\sqrt[4]{2}\right)^{41}$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(-2,3)$, $C(1,-3)$ și $D(4,a)$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât dreptele AB și CD să fie paralele.

5p **6.** Fie mulțimea $A=\left\{0;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2}\right\}$. Care este probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea A, acesta să fie soluție a ecuației $\sin^3 x+\cos^3 x=1$?

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\a&0&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, notăm $B_n=A^n+A^{n+1}+A^{n+2}$.

5p **a)** Arătați că $A^{2010}=a^{670}\cdot I_3$.

5p **b)** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(B_1)=0$.

5p **c)** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care toate matricele B_n, $n\in\mathbb{N}^*$ sunt inversabile.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea $x*y=2xy-3x-3y+m$, $m\in\mathbb{R}$. Fie mulțimea $M=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

5p **a)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*y\in M$, pentru orice $x,y\in M$.

5p **b)** Pentru $m=6$ arătați că $(M,*)$ este grup.

5p **c)** Pentru $m=6$, demonstrați că funcția $f:M\to\mathbb{R}^*$, $f(x)=2x-3$ este un izomorfism între grupurile $(M,*)$ și $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}$.

5p **a)** Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f spre $+\infty$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{f(1)+f(2)+...+f(n)}{-\sqrt[3]{2n+1}}\right)^{\sqrt[3]{2n}}$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1 \frac{x^n dx}{x^2+x+1}$.

5p	**a)** Calculați $I_1 + I_2 + I_3$.
5p	**b)** Arătați că şirul $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ este descrescător.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010
Proba E c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

BAREM DE CORECTARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$2\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{48}$	**2p**
	$3\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{81}$	**2p**
	$2\sqrt[3]{6}<3\sqrt[3]{3}$	**1p**
2.	$\lvert x\rvert \geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow \operatorname{Im} f\subset[0,+\infty)$	**2p**
	$x\geq 0\Rightarrow x=f(x)\Rightarrow[0,+\infty)\subset \operatorname{Im} f$	**2p**
	$\operatorname{Im} f=[0,+\infty)$	**1p**
3.	$\Delta=1-4m^2$	**2p**
	Ecuația are două soluții egale $\Leftrightarrow \Delta=0$	**1p**
	$\Delta=0\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{1}{2}$	**2p**
4.	$T_{k+1}=C_{41}^{k}\sqrt[4]{2^k}=C_{k+1}^{k}2^{\frac{k}{4}}$	**2p**
	$T_{k+1}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow 4$ divide k	**1p**
	Sunt 11 termeni raționali	**2p**
5.	$m_{AB}=m_{CD}$	**1p**
	$m_{AB}=-\dfrac{1}{2}$ şi $m_{CD}=\dfrac{a+3}{3}$	**2p**
	Finalizare: $a=-\dfrac{9}{2}$	**2p**
6.	$\sin^3 x+\cos^3 x=1, x\in A$, numai pentru $x\in\left\{0;\ \dfrac{\pi}{2}\right\}$	**3p**
	$P=\dfrac{2}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **30 de puncte**

1.a)	$A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&0&0\\0&a&0\end{pmatrix}$	**1p**
	$A^3=aI_3$	**2p**
	$A^{2010}=\left(A^3\right)^{670}=a^{670}I_3$	**2p**

b)	$B_1 = A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a & a & a \end{pmatrix}$	**2p**
	$\det(B_1) = a(a-1)^2$	**2p**
	$\det(B_1) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ sau $a = 1$	**1p**
c)	$B_n = A^{n-1}B_1$	**1p**
	B_n inversabilă $\Leftrightarrow \det(B_n) \neq 0$	**1p**
	$\det B_n = a^n(a-1)^2$	**2p**
	$a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$	**1p**
2.a)	$x * y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} + m - 6$	**1p**
	Dacă $m = 6$, atunci oricare ar fi $x, y \in M$ rezultă că $x * y \neq \frac{3}{2}$, adică $x * y \in M$	**2p**
	Dacă $m \neq 6$, atunci $0 * \frac{2m-3}{6} = \frac{3}{2}$	**1p**
	Cum $0, \frac{2m-3}{6} \in M$ rezultă $0 * \frac{2m-3}{6} \notin M$, deci $m = 6$	**1p**
b)	Asociativitatea	**1p**
	Justificarea faptului că elementul neutru este 2	**2p**
	Justificarea faptului că pentru $x \in M$, există $x' = \frac{3x-4}{2x-3} \in M$ astfel încât $x * x' = x' * x = 2$	**2p**
c)	Verificarea relației $f(x * y) = f(x) \cdot f(y),\ \forall x, y \in M$	**3p**
	Justificarea faptului că f este bijectivă	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **30 de puncte**

1.a)	$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}, x \neq \pm\frac{1}{2}$	**2p**
	$f(0) = -2$ şi $f'(0) = 0$	**2p**
	$y + 2 = 0$	**1p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$	**3p**
	$y = 0$ asimptotă orizontală spre $+\infty$	**2p**
c)	$f(1) + f(2) + ... + f(n) = 1 - \sqrt[3]{2n+1}$	**2p**
	$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}\right)^{-\sqrt[3]{2n+1}}\right]^{\frac{\sqrt[3]{2n}}{-\sqrt[3]{2n+1}}} =$	**1p**
	$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{\sqrt[3]{2n}}{\sqrt[3]{2n+1}}\right)} =$	**1p**
	$= e^{-1} = \frac{1}{e}$	**1p**
2.a)	$I_1 + I_2 + I_3 = \int_0^1 \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 + x + 1}dx =$	**2p**

	$=\int_0^1 x dx=\frac{1}{2}$	**3p**
b)	$0\le x\le 1\Rightarrow x^n\ge x^{n+1}$	**1p**
	$x^2+x+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$\frac{x^n}{x^2+x+1}\ge\frac{x^{n+1}}{x^2+x+1},\ \forall x\in[0,1]\Rightarrow I_n\ge I_{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, adică şirul este descrescător	**2p**
c)	$x^2+x+1\ge 1,\ \forall x\ge 0\Rightarrow 0\le\frac{x^n}{x^2+x+1}\le x^n,\ \forall x\in[0,1]\Rightarrow$	**2p**
	$\Rightarrow 0\le I_n\le\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$	**2p**
	$\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$	**1p**

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ **MODEL**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele (I, II, III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $z=1-i\sqrt{3}$.

5p **2.** Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+x+1$.

5p **3.** Ştiind că doi termeni ai unei progresii geometrice sunt $b_3=6$ şi $b_5=24$, determinați termenul b_7.

5p **4.** Determinați $x>0$, ştiind că $\log_a x=2\log_a 3-3\log_a 2$, unde $a>0,\ a\neq 1$.

5p **5.** Scrieți ecuația dreptei care conține punctul $A(3,2)$ şi este perpendiculară pe dreapta $d:x+2y+5=0$.

5p **6.** Ştiind că $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ şi $\sin x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, calculați $\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Fie matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & -2x & 4x^2\\ 0 & 1 & -4x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ din mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Calculați $\left(A(2)-A(0)\right)^{2010}$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Demonstrați că matricea $A(x)$ este inversabilă şi calculați inversa matricei $A(x)$.

2. Pe mulțimea $G=(0,1)$ se defineşte legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{xy}{2xy-x-y+1}$.

5p **a)** Verificați dacă $e=\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii „$*$”.

5p **b)** Arătați că orice element din mulțimea G este simetrizabil în raport cu legea „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că funcția $f:G\to\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=\frac{1}{x}-1$ este un izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $\left(\mathbb{R}_+^*,\cdot\right)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+1$.

5p **a)** Calculați $f'(5)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n$.

5p **c)** Arătați că ecuația $f'(x)=0$ are exact trei soluții reale distincte.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n=\int_0^1\frac{\left(x^2+x+1\right)^n-x}{x^2+1}dx$.

5p **a)** Calculați I_0.

5p **b)** Verificați dacă $I_2-I_0\in\mathbb{Q}$.

5p **c)** Arătați că $I_{4n+1}\in\mathbb{Q}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2011
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ **MODEL**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left\|1-i\sqrt{3}\right\|=\sqrt{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=$	**3p**
	$=\sqrt{4}=2$	**2p**
2.	$x^2+x+1-y=0$	**1p**
	$\Delta=4y-3\geq 0$	**2p**
	$\text{Im}_f=\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$	**2p**
3.	$b_1=\frac{3}{2}$	**1p**
	$q^2=4$	**2p**
	$b_7=96$	**2p**
4.	$\log_a x=\log_a 9-\log_a 8$	**2p**
	$\log_a x=\log_a \frac{9}{8}\Rightarrow x=\frac{9}{8}$	**3p**
5.	$m_d=-\frac{1}{2}\Rightarrow m_{d'}=2$ unde $d\perp d'$	**2p**
	Ecuația dreptei d' este $y=2x-4$	**3p**
6.	$\cos^2 x=1-\sin^2 x=\frac{1}{9}$	**2p**
	$\cos x=\pm\frac{1}{3}$	**1p**
	$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow \cos x=-\frac{1}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)-A(0)=\begin{pmatrix}0&-4&16\\0&0&-8\\0&0&0\end{pmatrix}$	**2p**
	$\left(A(2)-A(0)\right)^3=O_3$	**2p**
	$\left(A(2)-A(0)\right)^{2010}=O_3$	**1p**

b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1 & -2x-2y & 4y^2+8xy+4x^2\\ 0 & 1 & -4x-4y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	Finalizare	**2p**
c)	$\det(A(x))=1\neq 0$, deci matricea este inversabilă	**1p**
	$A(x)A(-x)=A(0)=I_3$	**2p**
	$A^{-1}(x)=A(-x)=\begin{pmatrix}1 & 2x & 4x^2\\ 0 & 1 & 4x\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$x*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}*x=x, \forall x\in G$	**1p**
	Verificare	**3p**
	Legea "$*$" are element neutru $e=\frac{1}{2}$	**1p**
b)	Orice element din G este simetrizabil şi $x'=1-x$	**3p**
	$0<x'<1$, deci $x'\in G$	**2p**
c)	Justificarea faptului că funcția f este bijectivă	**2p**
	$f(x*y)=\frac{1}{x*y}-1=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}$	**2p**
	$f(x)f(y)=\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}=f(x*y)$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 5}(x-2)(x-3)(x-4)=$	**2p**
	$=6$	**1p**
b)	$\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}=\frac{n-1}{n-5}$	**1p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n-5}\right)^n=$	**1p**
	$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n-5}\right)^n=$	**1p**
	$=e^4$	**2p**
c)	$f(2)=1,\ f(3)=1,\ f(4)=1,\ f(5)=1$	**1p**
	f continuă pe intervalele $[2,3],[3,4],[4,5]$	**1p**
	f derivabilă pe intervalele $(2,3),(3,4),(4,5)$	**1p**
	Din teorema lui Rolle şi din faptul că f' este de gradul trei rezultă că $f'(x)=0$ are exact trei soluții reale distincte	**2p**
2.a)	$I_0=\int_0^1\frac{1-x}{x^2+1}dx=$	**1p**

	$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = arctgx \Big\vert_0^1 = \frac{\pi}{4}$	**2p**
	$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big\vert_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$	**2p**
	$I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$	**1p**
b)	$I_2 - I_0 = \int_0^1 \frac{\left(x^2+x+1\right)^2 - 1}{x^2+1}dx =$	**1p**
	$= \int_0^1 \left(x^2+2x+2\right)dx - \int_0^1 \frac{2}{x^2+1}dx =$	**1p**
	$= \frac{10}{3} - 2\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} =$	**1p**
	$= \frac{10}{3} - \frac{\pi}{2} \notin \mathbb{Q}$	**2p**
c)	X^2+1 divide $\left(X^2+X+1\right)^{4n+1} - X$	**2p**
	$\frac{\left(x^2+x+1\right)^{4n+1} - x}{x^2+1} = g(x)$, unde $g \in \mathbb{Z}[X]$	**1p**
	$\int_0^1 g(x)dx \in \mathbb{Q}$	**2p**

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, cu termeni pozitivi, dacă $b_1+b_2=6$ şi $b_3+b_4=24$.

5p **2.** Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1-a^2)x+4$ este constantă.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\left(\frac{3}{2}\right)^x<\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

5p **4.** Determinaţi numărul termenilor raţionali ai dezvoltării $\left(1+\sqrt{2}\right)^{10}$.

5p **5.** Calculaţi distanţa de la punctul $A(2,2)$ la dreapta determinată de punctele $B(1,0)$ şi $C(0,1)$.

5p **6.** Triunghiul *ABC* are măsura unghiului *A* de 60°, $AB=4$ şi $AC=5$. Calculaţi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră mulţimea $H=\left\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\;\middle|\;A^2=A\right\}$.

5p **a)** Arătaţi că $\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}\in H$.

5p **b)** Demonstraţi că, dacă $A\in H$, atunci $A^n\in H$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Arătaţi că mulţimea *H* este infinită.

2. Se consideră polinomul $f=(X+i)^{10}+(X-i)^{10}$, având forma algebrică $f=a_{10}X^{10}+a_9X^9+...+a_1X+a_0$, unde $a_0,a_1,...,a_{10}\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Determinaţi restul împărţirii polinomului f la $X-i$.

5p **b)** Arătaţi că toţi coeficienţii polinomului f sunt numere reale.

5p **c)** Demonstraţi că toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^5-5x+4$.

5p **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

5p **b)** Arătaţi că graficul funcţiei *f* are un punct de inflexiune.

5p **c)** Arătaţi că, pentru orice $m\in(0,8)$, ecuaţia $f(x)=m$ are exact trei soluţii reale distincte.

2. Se consideră funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=e^{-x}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^1 g(x)\,dx$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^1 x^5 g(x^3)\,dx$.

5p **c)** Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ definit prin $I_n=\int_1^n g(x^3)\,dx$ este convergent.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_3 = b_1 q^2,\ b_4 = b_1 q^3$ $24 = 6q^2$ $q = 2$	**2p** **2p** **1p**
2.	$1 - a^2 = 0$ $a = 1$ sau $a = -1$	**3p** **2p**
3.	$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$ Deoarece $\frac{3}{2} > 1$, inecuația devine $x < -x$ $S = (-\infty, 0)$	**1p** **2p** **2p**
4.	$T_{k+1} = C_{10}^k \sqrt{2}^k,\ k \in \{0,1,\ldots,10\}$ $T_{k+1} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow k$ par Sunt 6 termeni raționali	**2p** **2p** **1p**
5.	$BC:\ x + y - 1 = 0$ Distanța este $\frac{\lvert 2+2-1 \rvert}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$	**2p** **3p**
6.	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A =$ $= 10$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Aşadar $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$	**4p** **1p**
b)	$(A^n)^2 = A^{2n} = (A^2)^n =$ $= A^n$, deci $A^n \in H$	**2p** **3p**
c)	Matricele $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparțin lui H pentru orice $x \in \mathbb{R}$ Finalizare	**4p** **1p**
2.a)	Restul împărțirii polinomului f la $X - i$ este $f(i)$ $f(i) = (2i)^{10} = -2^{10}$	**2p** **3p**

b)	$f=\sum_{k=0}^{10}\left(C_{10}^{k}X^{10-k}i^{k}+C_{10}^{k}X^{10-k}(-i)^{k}\right)=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}X^{10-k}i^{k}\left(1+(-1)^{k}\right)$ $a_{2p+1}=0\in\mathbb{R}$, pentru orice $p\in\{0,1,2,3,4\}$ $a_{2p}=C_{10}^{2p}i^{2p}\left(1+(-1)^{2p}\right)=2C_{10}^{2p}\cdot(-1)^{p}\in\mathbb{R}$, pentru orice $p\in\{0,1,2,3,4,5\}$	**2p** **1p** **2p**
c)	Dacă z este rădăcină, atunci $(z+i)^{10}=-(z-i)^{10}$, deci $\|z+i\|=\|z-i\|$ Punctul de afix z este egal depărtat de punctele de afixe $\pm i$, deci aparține axei reale	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$ $f'(x)=5x^4-5$ $f'(2)=75$	**2p** **2p** **1p**
b)	$f''(x)=20x^3$ se anulează în 0 Deoarece f'' are semne opuse de o parte şi de cealaltă a lui 0, rezultă că 0 este punct de inflexiune	**3p** **2p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x^4-1=0\Rightarrow x=\pm 1$ Tabelul de variație a funcției f Finalizare	**1p** **2p** **2p**
2.a)	$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-x}\Big\|_0^1=$ $=\frac{e-1}{e}$	**3p** **2p**
b)	Cu schimbarea de variabilă $x^3=t$ se obține $\frac{1}{3}\int_0^1 t\cdot e^{-t}dt=$ $=-\frac{1}{3}te^{-t}\Big\|_0^1+\frac{1}{3}\int_0^1 e^{-t}dt=\frac{e-2}{3e}$	**2p** **3p**
c)	$I_{n+1}-I_n=\int_n^{n+1}g\left(x^3\right)dx=\int_n^{n+1}e^{-x^3}dx\geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci şirul este crescător $0\leq I_n\leq\int_1^n e^{-x}dx=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^n}<\frac{1}{e}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci şirul este mărginit Deoarece şirul este monoton şi mărginit, el este convergent	**2p** **2p** **1p**

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{2},\sqrt{5}\right)\cap\mathbb{Z}=\{2\}$.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care dreapta $x=2$ este axa de simetrie a parabolei $y=x^2+mx+4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea $[0,2\pi)$ ecuația $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

5p **4.** Determinați $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$, pentru care $C_n^2+A_n^2=18$.

5p **5.** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care dreptele $d_1: ax+y+2011=0$ şi $d_2: x-2y=0$ sunt paralele.

5p **6.** Fie x un număr real care verifică egalitatea $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2$. Arătați că $\sin 2x=1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\left(A(x)-A(y)\right)^{2011}=O_3$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați inversa matricei $A(x)$, unde $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră $\alpha\in\mathbb{C}$ şi polinomul $f=X^3+(1-\alpha)X^2+(\alpha-2)iX+\alpha+(\alpha-2)i\in\mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Arătați că polinomul f are rădăcina -1.

5p **b)** Arătați că, dacă p,q sunt numere complexe şi polinomul $g=X^2+pX+q\in\mathbb{C}[X]$ are două rădăcini distincte, complex conjugate, atunci p şi q sunt numere reale şi $p^2<4q$.

5p **c)** Determinați $\alpha\in\mathbb{C}$ pentru care polinomul f are două rădăcini distincte, complex conjugate.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$.

5p **a)** Arătați că funcția f este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$.

2. Se consideră funcția $f:[1,2]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3x+2$.

5p **a)** Calculați $\int_1^4 f\left(\sqrt{x}\right)dx$.

5p **b)** Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției $g:[1;2]\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{f(x)}{x}$ şi de axa Ox.

5p **c)** Arătați că $(4n+2)\int_1^2 f^n(x)dx+n\int_1^2 f^{n-1}(x)dx=0$.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1<\sqrt{2}<2$	**2p**
	$2<\sqrt{5}<3$	**2p**
	Rezultă că 2 este singurul număr întreg din intervalul dat	**1p**
2.	Axa de simetrie a parabolei este dreapta de ecuație $x=x_V=-\frac{b}{2a}$	**2p**
	$-\frac{m}{2}=2\Rightarrow m=-4$	**3p**
3.	$x-\frac{\pi}{6}\in\left\{(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$	**3p**
	$x\in\left\{\frac{\pi}{3},\pi\right\}$	**2p**
4.	$A_n^2=n(n-1)$	**2p**
	$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$	**2p**
	$n(n-1)=12\Rightarrow n=4$	**1p**
5.	$\frac{a}{1}=\frac{1}{-2}$	**3p**
	$a=-\frac{1}{2}$	**2p**
6.	$\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}=2$	**2p**
	$1=2\sin x\cdot\cos x$	**2p**
	$\sin 2x=1$	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & y & y^2\\ 0 & 1 & 2y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	**1p**
	$\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & y & y^2\\ 0 & 1 & 2y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x+y & (x+y)^2\\ 0 & 1 & 2(x+y)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A(x+y)$	**4p**

b)	$A(x)-A(y)=\begin{pmatrix}0 & x-y & x^2-y^2\\ 0 & 0 & 2(x-y)\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$	**1p**
	$\left(A(x)-A(y)\right)^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2(x-y)^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$	**2p**
	$\left(A(x)-A(y)\right)^3=O_3 \Rightarrow \left(A(x)-A(y)\right)^{2011}=O_3$	**2p**
c)	Matricea A este inversabilă	**1p**
	$\left(A(x)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -x & x^2\\ 0 & 1 & -2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A(-x)$	**4p**
2.a)	$f(-1)=-1+1-\alpha-i(\alpha-2)+\alpha+(\alpha-2)i$	**2p**
	Finalizare: $f(-1)=0$	**3p**
b)	Rădăcinile lui g sunt de forma $x_1=u+iv$ şi $x_2=u-iv$, unde $u,v\in\mathbb{R}$	**1p**
	Din relațiile lui Viète rezultă $x_1+x_2=-p$ şi $x_1x_2=q$	**1p**
	$p=-2u\in\mathbb{R}$ şi $q=u^2+v^2\in\mathbb{R}$	**2p**
	Ecuația $x^2+px+q=0$, cu $p,q\in\mathbb{R}$, are soluții distincte complex conjugate dacă şi numai dacă $\Delta<0$, de unde $p^2<4q$	**1p**
c)	$f=\left(X+1\right)\left(X^2-\alpha X+\alpha+(\alpha-2)i\right)$	**2p**
	Polinomul $h=X^2-\alpha X+\alpha+(\alpha-2)i\in\mathbb{C}[X]$ are două rădăcini distincte complex conjugate	**1p**
	Conform punctului **b)**, rezultă $\alpha\in\mathbb{R}$ şi $\alpha+(\alpha-2)i\in\mathbb{R}$, de unde $\alpha=2$, care convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	**1.a)** $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{-2}{x^2-1}$	**3p**
	$f'(x)<0$ pentru orice $x>1$, de unde concluzia	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$, deci $x=1$ este asimptotă verticală	**2p**
	f este continuă pe $(1,\infty)$, deci nu are alte asimptote verticale	**1p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x+1}{x-1}=0$, deci $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)-\ln(x-1)}{x^{-1}}$ - nedeterminare de forma $\dfrac{0}{0}$	**2p**
	Cu regula lui l'Hospital, limita este $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)^{-1}-(x-1)^{-1}}{-x^{-2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-1}=2$	**3p**
2.a)	$\int_1^4 (x-3\sqrt{x}+2)dx=\left(\dfrac{1}{2}x^2-3\cdot\dfrac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}+2x\right)\Big\|_1^4=$	**4p**
	$=-\dfrac{1}{2}$	**1p**
b)	$A=\int_1^2\left\|\dfrac{f(x)}{x}\right\|dx=-\int_1^2\dfrac{f(x)}{x}dx$, deoarece $f\le 0$ pe intervalul [1, 2],	**2p**
	$=-\int_1^2 xdx+3\int_1^2 dx-\int_1^2\dfrac{2}{x}dx=$	**1p**

	$=\frac{3}{2}-2\ln 2$	**2p**
c)	$\int_1^2 f^n(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^2(2x-3)'f^n(x)dx=\frac{1}{2}(2x-3)(x^2-3x+2)^n\Big\|_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2(2x-3)^2 nf^{n-1}(x)dx=$	**3p**
	$=-\frac{n}{2}\int_1^2(4x^2-12x+8+1)f^{n-1}(x)dx=-\frac{4n}{2}\int_1^2 f^n(x)dx-\frac{n}{2}\int_1^2 f^{n-1}(x)dx$, de unde concluzia	**2p**

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $z=(3+4i)(5-12i)$.

5p **2.** Punctul $V(2,3)$ este vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+b$. Calculați $f(3)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left|\sqrt{x}-1\right|=2$.

5p **4.** Determinați numerele naturale n, $n\geq 2$, pentru care $C_n^2\leq 4\cdot A_n^1$.

5p **5.** Fie $G(1,0)$ centrul de greutate al triunghiului ABC, unde $A(2,5)$ şi $B(-1,-3)$. Determinați coordonatele punctului C.

5p **6.** Calculați raza cercului înscris în triunghiul ABC ştiind că $AB=AC=5$ şi $BC=8$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ a & 1 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Calculați $\det A$.

5p **b)** Arătați că rang A = 3, oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$.

5p **c)** Determinați valorile întregi ale lui a ştiind că matricea A^{-1} are toate elementele numere întregi.

2. Se consideră numerele reale a,b,c şi polinomul $f=X^4+aX^3+bX^2+cX+36\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Calculați $a+b+c$ în cazul în care restul împărțirii lui f la $X-1$ este 40.

5p **b)** Determinați $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{1}{3}$.

5p **c)** Arătați că dacă $a=6$ şi $b=18$, atunci polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-4\ln x$.

5p **a)** Arătați că funcția f este strict descrescătoare pe $(0,1]$.

5p **b)** Determinați asimptotele verticale ale graficului funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, există un unic număr $x_n\in(0,1]$ pentru care $f(x_n)=n$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$.

5p **a)** Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției f, axa Ox şi de dreptele de ecuații $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

5p **c)** Demonstrați că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^n(x)dx$ este convergent.

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\log_2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)+\log_2\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)=2$.

5p **2.** Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+5x+4$ cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+3^{x+1}=4$.

5p **4.** Determinați rangul termenului care conține x^{14} în dezvoltarea binomului $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{20}$, $x>0$.

5p **5.** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3,3)$ şi este paralelă cu dreapta d de ecuație $3x+2y-1=0$.

5p **6.** Determinați măsura unghiului C al triunghiului ABC, ştiind că $BC=2$, $AB=\sqrt{2}$ și măsura unghiului BAC este egală cu $45°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}-x+ay+(2a+4)z=1\\(a+2)x+ay+(a+1)z=1\\(a+1)x+(2a-1)y+3z=2\end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că determinantul matricei sistemului este egal cu $3a^3+9a^2-3a-9$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul este compatibil determinat.

5p **c)** Pentru $a=-2$, rezolvați sistemul.

2. Se consideră polinomul $f=X^8+\hat{4}X^4+\hat{3}$, $f\in\mathbb{Z}_5[X]$.

5p **a)** Arătați că $a^5=a$, pentru orice $a\in\mathbb{Z}_5$.

5p **b)** Arătați că polinomul f este reductibil peste $\mathbb{Z}_5$.

5p **c)** Arătați că polinomul f nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real $m>0$, ecuația $f(x)=m$ are o soluție unică în $\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul p, se consideră numărul $I_p=\int_0^1 x^p e^{x^2}dx$.

5p **a)** Calculați I_1.

5p **b)** Arătați că $2I_p+(p-1)I_{p-2}=e$, pentru orice $p\geq 3$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\left(e^{\frac{1^2}{n^2}}+2e^{\frac{2^2}{n^2}}+\ldots+ne^{\frac{n^2}{n^2}}\right)$.

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)+\log_2\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)=\log_2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)$ Finalizare	**3p** **2p**
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ sau $x=-4$ Distanța este egală cu 3	**3p** **2p**
3.	Notăm $3^x=t$ și obținem $t+3t=4$ $t=1 \Leftrightarrow x=0$	**3p** **2p**
4.	$T_{k+1}=C_{20}^k\cdot x^{20-k}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_{20}^k\cdot x^{20-k-\frac{k}{2}}$ $20-k-\frac{k}{2}=14 \Leftrightarrow k=4$ Rangul termenului este 5	**2p** **2p** **1p**
5.	$m_d=-\frac{3}{2}$ Ecuația paralelei este $y-y_A=-\frac{3}{2}(x-x_A)$ adică $y=-\frac{3}{2}x+\frac{15}{2}$	**2p** **3p**
6.	$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow \sin C=\frac{1}{2}$ $m(\sphericalangle C)=30°$, deoarece $m(\sphericalangle A)>m(\sphericalangle C)$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}-1 & a & 2a+4\\ a+2 & a & a+1\\ a+1 & 2a-1 & 3\end{vmatrix}=$ $=\begin{vmatrix}3a+3 & a & 2a+4\\ 3a+3 & a & a+1\\ 3a+3 & 2a-1 & 3\end{vmatrix}=(3a+3)\begin{vmatrix}1 & a & 2a+4\\ 1 & a & a+1\\ 1 & 2a-1 & 3\end{vmatrix}=(3a+3)\begin{vmatrix}1 & a & 2a+4\\ 0 & 0 & -a-3\\ 0 & a-1 & -2a-1\end{vmatrix}$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
b)	Sistemul este compatibil determinat $\Leftrightarrow \det A\neq 0$ $\det A=0 \Leftrightarrow a\in\{-1,1,-3\}$ $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1,-3\}$	**2p** **2p** **1p**
c)	$a=-2\Rightarrow\begin{cases}-x-2y=1\\ -2y-z=1\\ -x-5y+3z=2\end{cases}$	**1p**

	$x=-\frac{1}{9},\ y=-\frac{4}{9},\ z=-\frac{1}{9}$	4p
2.a)	$\hat{0}^5=\hat{0},\ \hat{1}^5=\hat{1},\ \hat{2}^5=\hat{2},\ \hat{3}^5=\hat{3},\ \hat{4}^5=\hat{4}$	5p
b)	$f=X^8+X^4+\hat{3}X^4+\hat{3}=X^4\left(X^4+\hat{1}\right)+\hat{3}\left(X^4+\hat{1}\right)$	2p
	$f=\left(X^4+\hat{1}\right)\left(X^4+\hat{3}\right)$	3p
c)	$f\left(\hat{0}\right)=\hat{3}$	1p
	$a\neq\hat{0}\Rightarrow a^4=\hat{1}$	2p
	$f(a)=\hat{1}+\hat{4}+\hat{3}=\hat{3}$ pentru orice $a\neq\hat{0}$	1p
	Finalizare	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	*f* este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	2p
	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$	3p
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}=2$	2p
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$	2p
	$y=2x$ este ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției *f*	1p
c)	*f* este continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\Rightarrow f$ este surjectivă, deci ecuația are soluție	2p
	$f'(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este strict crescătoare $\Rightarrow f$ este injectivă, deci soluția este unică	3p
2.a)	$I_1=\int_0^1 x\cdot e^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big\vert_0^1=$	3p
	$=\frac{e-1}{2}$	2p
b)	$2I_p=\int_0^1 x^{p-1}\left(2xe^{x^2}\right)dx=\int_0^1\left(e^{x^2}\right)'x^{p-1}dx=e^{x^2}x^{p-1}\Big\vert_0^1-(p-1)\int_0^1 e^{x^2}x^{p-2}\,dx$	3p
	$2I_p=e-(p-1)I_{p-2}\ \Rightarrow\ 2I_p+(p-1)I_{p-2}=e$	2p
c)	Considerăm funcția continuă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^{x^2}$, șirul de diviziuni $\Delta_n=\left(\frac{k}{n}\right)_{k=\overline{0,n}}$ cu $\lVert\Delta_n\rVert\to 0$ și punctele intermediare $\frac{k}{n}\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$	1p
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\left(e^{\frac{1^2}{n^2}}+2e^{\frac{2^2}{n^2}}+\ldots+ne^{\frac{n^2}{n^2}}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot e^{\left(\frac{k}{n}\right)^2}=$	2p
	$=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx=\frac{e-1}{2}$	2p

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați partea reală a numărului complex $(1+2i)^2$.

5p **2.** Se notează cu x_1, x_2 soluțiile ecuației $x^2-3x+a=0$, unde a este un număr real. Determinați a pentru care $x_1+x_2+x_1x_2=5$.

5p **3.** Se notează cu g inversa funcției bijective $f:(0,+\infty)\to(4,+\infty)$, $f(x)=2^x+3$. Determinați $g(5)$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile lui A, aceasta să conțină exact trei elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$ și $B(7,12)$. Determinați coordonatele punctului M, știind că $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, știind că $\frac{\sin x+2\cos x}{\cos x}=3$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se notează cu $D(a,b,c)$ determinatul matricei $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2a & 2b & 2c\\ 3a^2 & 3b^2 & 3c^2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Calculați $D(0,1,-1)$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care matricea $A(0,1,x)$ are rangul egal cu 2.

5p **c)** Arătați că dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi și $D(a,b,c)=0$, atunci triunghiul este isoscel.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ și funcția $f:\mathbb{Z}_5\to\mathbb{Z}_5$, $f(x)=x^3+\hat{2}x^2+\hat{4}x+\hat{3}$.

5p **a)** Calculați $f(\hat{1})+f(\hat{3})$.

5p **b)** Descompuneți în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul $P=X^3+\hat{2}X^2+\hat{4}X+\hat{3}\in\mathbb{Z}_5[X]$.

5p **c)** Arătați că funcția f nu este surjectivă.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+9}{\sqrt{x^2+3}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)\sqrt{x^2+3}=\frac{3-9x}{x^2+3}$, pentru orice număr real *x*.

5p **b)** Determinați asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **c)** Determinați imaginea funcției *f*.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

5p **a)** Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x\ln x-x$ este o primitivă a funcției *f*.

5p **b)** Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției *f*, axa *Ox* și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

5p **c)** Arătați că $(p+1)\int_1^x f^p(t)dt+\int_1^x f^{p+1}(t)dt=xf^{p+1}(x)$, pentru orice $x\geq 1$ și orice $p>0$.

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1+2i)^2=-3+4i$	**3p**
	Partea reală este egală cu -3	**2p**
2.	$x_1+x_2=3$	**2p**
	$x_1x_2=a$	**2p**
	$a=2$	**1p**
3.	$x=g(5)\Rightarrow f(x)=5$	**2p**
	$2^x+3=5$	**2p**
	$x=1$	**1p**
4.	$p=\dfrac{\text{nr.cazuri favorabile}}{\text{nr.cazuri posibile}}$	**1p**
	Numărul cazurilor posibile este $2^5=32$	**2p**
	Numărul submulțimilor cu 3 elemente este $C_5^3=10$, adică 10 cazuri favorabile	**1p**
	$p=\dfrac{5}{16}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AB}=6\vec{i}+9\vec{j}$ și $\overrightarrow{AM}=(x_M-1)\vec{i}+(y_M-3)\vec{j}$	**2p**
	$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M-1=2\\y_M-3=3\end{cases}$	**2p**
	$M(3,6)$	**1p**
6.	$\sin x+2\cos x=3\cos x$	**2p**
	$\sin x=\cos x$	**1p**
	$x=\dfrac{\pi}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(0,1,-1)=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&-2\\0&3&3\end{vmatrix}$	**2p**
	$D(0,1,-1)=12$	**3p**
b)	$A(0,1,x)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2x\\0&3&3x^2\end{pmatrix}$	**1p**
	Există minorul $d=\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}=2\neq0\Rightarrow\operatorname{rang}A(0,1,x)\geq2$	**1p**
	$\operatorname{rang}A(0,1,x)=2\Leftrightarrow D(0,1,x)=0$	**1p**
	$D(0,1,x)=6x(x-1)\Rightarrow x=0$ sau $x=1$	**2p**

c)	$D(a,b,c)=6\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$	**1p**
	$D(a,b,c)=6(b-a)(c-a)(c-b)$	**2p**
	$D(a,b,c)=0\Rightarrow a=b$ sau $b=c$ sau $c=a$, deci triunghiul este isoscel	**2p**
2.a)	$f(\hat{1})=\hat{0}$	**2p**
	$f(\hat{3})=\hat{0}$	**2p**
	Finalizare	**1p**
b)	P are rădăcinile $\hat{1}$, $\hat{3}$ și $\hat{4}$	**3p**
	$P=(X-\hat{1})(X-\hat{3})(X-\hat{4})=(X+\hat{4})(X+\hat{2})(X+\hat{1})$	**2p**
c)	$f(\hat{1})=f(\hat{3})$, deci f nu este injectivă	**2p**
	$\operatorname{Im} f$ nu poate avea 5 elemente, deci f nu este nici surjectivă	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{3-9x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$	**4p**
	Finalizare	**1p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$	**2p**
	Din monotonie, valoarea maximă a funcției este $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=2\sqrt{7}$	**2p**
	Imaginea funcției este $\left(-1,2\sqrt{7}\right]$	**1p**
2.a)	F este derivabilă și $F'(x)=\ln x$, pentru orice $x>0$	**3p**
	$F'=f$	**2p**
b)	Aria este egală cu $\int\limits_1^e \lvert\ln x\rvert\,dx=$	**2p**
	$=F(x)\Big\vert_1^e=1$	**3p**
c)	$(p+1)\int\limits_1^x f^p(t)dt=\int\limits_1^x t\cdot(p+1)\cdot f^p(t)\cdot\dfrac{1}{t}dt=$	**1p**
	$=\int\limits_1^x t\cdot\left(\ln^{p+1}t\right)'dt=t\cdot\ln^{p+1}t\Big\vert_1^x-\int\limits_1^x\ln^{p+1}tdt=x\ln^{p+1}x-\int\limits_1^x\ln^{p+1}tdt$	**3p**
	Finalizare	**1p**

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{2},\sqrt{5}\right)\cap\mathbb{Z}=\{2\}$.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care dreapta $x=2$ este axa de simetrie a parabolei $y=x^2+mx+4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea $[0,2\pi)$ ecuația $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

5p **4.** Determinați $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, pentru care $C_n^2+A_n^2=18$.

5p **5.** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care dreptele $d_1: ax+y+2011=0$ şi $d_2: x-2y=0$ sunt paralele.

5p **6.** Fie x un număr real care verifică egalitatea $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2$. Arătați că $\sin 2x=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\left(A(x)-A(y)\right)^{2011}=O_3$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați inversa matricei $A(x)$, unde $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră $\alpha\in\mathbb{C}$ şi polinomul $f=X^3+(1-\alpha)X^2+(\alpha-2)iX+\alpha+(\alpha-2)i\in\mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Arătați că polinomul f are rădăcina -1.

5p **b)** Arătați că, dacă p,q sunt numere complexe şi polinomul $g=X^2+pX+q\in\mathbb{C}[X]$ are două rădăcini distincte, complex conjugate, atunci p şi q sunt numere reale şi $p^2<4q$.

5p **c)** Determinați $\alpha\in\mathbb{C}$ pentru care polinomul f are două rădăcini distincte, complex conjugate.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$.

5p **a)** Arătați că funcția f este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$.

2. Se consideră funcția $f:[1,2]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3x+2$.

5p **a)** Calculați $\int_1^4 f\left(\sqrt{x}\right)dx$.

5p **b)** Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției $g:[1;2]\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{f(x)}{x}$ şi de axa Ox.

5p **c)** Arătați că $(4n+2)\int_1^2 f^n(x)dx+n\int_1^2 f^{n-1}(x)dx=0$.

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1<\sqrt{2}<2$	**2p**
	$2<\sqrt{5}<3$	**2p**
	Rezultă că 2 este singurul număr întreg din intervalul dat	**1p**
2.	Axa de simetrie a parabolei este dreapta de ecuaţie $x=x_V=-\dfrac{b}{2a}$	**2p**
	$-\dfrac{m}{2}=2\Rightarrow m=-4$	**3p**
3.	$x-\dfrac{\pi}{6}\in\left\{(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$	**3p**
	$x\in\left\{\dfrac{\pi}{3},\pi\right\}$	**2p**
4.	$A_n^2=n(n-1)$	**2p**
	$C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$	**2p**
	$n(n-1)=12\Rightarrow n=4$	**1p**
5.	$\dfrac{a}{1}=\dfrac{1}{-2}$	**3p**
	$a=-\dfrac{1}{2}$	**2p**
6.	$\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}=2$	**2p**
	$1=2\sin x\cdot\cos x$	**2p**
	$\sin 2x=1$	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & y & y^2\\ 0 & 1 & 2y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	**1p**
	$\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & y & y^2\\ 0 & 1 & 2y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x+y & (x+y)^2\\ 0 & 1 & 2(x+y)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A(x+y)$	**4p**

b)	$A(x)-A(y)=\begin{pmatrix}0 & x-y & x^2-y^2\\ 0 & 0 & 2(x-y)\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$	**1p**
	$\left(A(x)-A(y)\right)^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2(x-y)^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$	**2p**
	$\left(A(x)-A(y)\right)^3=O_3 \Rightarrow \left(A(x)-A(y)\right)^{2011}=O_3$	**2p**
c)	Matricea A este inversabilă	**1p**
	$\left(A(x)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -x & x^2\\ 0 & 1 & -2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A(-x)$	**4p**
2.a)	$f(-1)=-1+1-\alpha-i(\alpha-2)+\alpha+(\alpha-2)i$	**2p**
	Finalizare: $f(-1)=0$	**3p**
b)	Rădăcinile lui g sunt de forma $x_1=u+iv$ şi $x_2=u-iv$, unde $u,v\in\mathbb{R}$	**1p**
	Din relațiile lui Viète rezultă $x_1+x_2=-p$ şi $x_1x_2=q$	**1p**
	$p=-2u\in\mathbb{R}$ şi $q=u^2+v^2\in\mathbb{R}$	**2p**
	Ecuația $x^2+px+q=0$, cu $p,q\in\mathbb{R}$, are soluții distincte complex conjugate dacă şi numai dacă $\Delta<0$, de unde $p^2<4q$	**1p**
c)	$f=\left(X+1\right)\left(X^2-\alpha X+\alpha+(\alpha-2)i\right)$	**2p**
	Polinomul $h=X^2-\alpha X+\alpha+(\alpha-2)i\in\mathbb{C}[X]$ are două rădăcini distincte complex conjugate	**1p**
	Conform punctului **b)**, rezultă $\alpha\in\mathbb{R}$ şi $\alpha+(\alpha-2)i\in\mathbb{R}$, de unde $\alpha=2$, care convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	**1.a)** $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{-2}{x^2-1}$	**3p**
	$f'(x)<0$ pentru orice $x>1$, de unde concluzia	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$, deci $x=1$ este asimptotă verticală	**2p**
	f este continuă pe $(1,\infty)$, deci nu are alte asimptote verticale	**1p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x+1}{x-1}=0$, deci $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)-\ln(x-1)}{x^{-1}}$ - nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$	**2p**
	Cu regula lui l'Hospital, limita este $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^{-1}-(x-1)^{-1}}{-x^{-2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=2$	**3p**
2.a)	$\int_1^4(x-3\sqrt{x}+2)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-3\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}+2x\right)\Big\|_1^4=$	**4p**
	$=-\frac{1}{2}$	**1p**
b)	$A=\int_1^2\left\|\frac{f(x)}{x}\right\|dx=-\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx$, deoarece $f\le 0$ pe intervalul [1, 2],	**2p**
	$=-\int_1^2 xdx+3\int_1^2 dx-\int_1^2\frac{2}{x}dx=$	**1p**

	$=\frac{3}{2}-2\ln 2$	**2p**
c)	$\int_1^2 f^n(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^2(2x-3)'f^n(x)dx=\frac{1}{2}(2x-3)(x^2-3x+2)^n\Big\vert_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2(2x-3)^2nf^{n-1}(x)dx=$	**3p**
	$=-\frac{n}{2}\int_1^2(4x^2-12x+8+1)f^{n-1}(x)dx=-\frac{4n}{2}\int_1^2 f^n(x)dx-\frac{n}{2}\int_1^2 f^{n-1}(x)dx$, de unde concluzia	**2p**

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $(1+i)^2$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x-2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $2^{x+1}\le 4$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile cu trei elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$, elementele submulțimii alese să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}-\vec{j}$. Determinați numărul real a pentru care $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$.

5p **6.** Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=4$, $AC=5$ și $BC=7$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}2x+y+3z=0\\ x+2y+3z=0\\ x+y+mz=0\end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** În cazul $m=2$, determinați soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $x_0>0$ și $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & -2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și mulțimea $G=\left\{X(p)=I_2+pA \,\middle|\, p\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\right\}$.

5p **a)** Arătați că $X(p)\cdot X(q)\in G$, pentru orice $X(p),\ X(q)\in G$.

5p **b)** Admitem că $(G,\cdot)$ este grup comutativ având elementul neutru $X(0)$. Determinați inversul elementului $X(p)$ în acest grup.

5p **c)** Rezolvați ecuația $(X(p))^3=I_2+7A$, unde $X(p)\in G$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-12x$.

5p **a)** Arătați că funcția este crescătoare pe intervalul $[2,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{f(x)}$.

5p **c)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care ecuația $f(x)=a$ are trei soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că orice primitivă a lui f este strict crescătoare pe $(-1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1\dfrac{f(x)}{x+1}\,dx$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_x^{2x}f(t)\,dt}{x}$.

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1+i)^2=2i$	**3p**
	$\lvert 2i\rvert=2$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2+3x+2=0$	**1p**
	$x_1=-1\Rightarrow y_1=-1$	**2p**
	$x_2=-2\Rightarrow y_2=0$	**2p**
3.	$2^{x+1}\le 2^2$	**1p**
	$x+1\le 2$	**2p**
	$S=(-\infty,1]$	**2p**
4.	$p=\dfrac{\text{nr.cazuri favorabile}}{\text{nr.cazuri posibile}}$	**1p**
	Submulțimile cu 3 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice sunt: $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5\}$ şi $\{1,3,5\}\Rightarrow$ 4 cazuri favorabile	**2p**
	Numărul submulțimilor cu 3 elemente este $C_5^3=10\Rightarrow$ 10 cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{2}{5}$	**1p**
5.	$\vec{u}\cdot\vec{v}=3\Leftrightarrow a+2=3$	**4p**
	$a=1$	**1p**
6.	$\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}$	**2p**
	$\cos A=-\dfrac{1}{5}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&2&3\\1&1&m\end{pmatrix}$	**2p**
	$\det A=3m-6$	**3p**
b)	Sistemul are o soluție unică dacă şi numai dacă $\det A\ne 0$	**2p**
	Finalizare: $m\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$	**3p**

c)	$\det A=0$ şi $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\neq 0$, deci matricea sistemului are rangul doi	1p
	$z=\alpha\Rightarrow\begin{cases}2x+y=-3\alpha\\ x+2y=-3\alpha\end{cases}\Rightarrow x=-\alpha,\ y=-\alpha$	2p
	${x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2=3\Rightarrow(-\alpha)^2+(-\alpha)^2+\alpha^2=3\Rightarrow\alpha\in\{-1,1\}$	1p
	Soluția este $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,-1)$	1p
2.a)	$X(p)\cdot X(q)=X(p+q+pq)$	3p
	$p,q\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\Rightarrow(p+1)(q+1)\neq 0\Rightarrow p+q+pq\neq -1$, deci $X(p+q+pq)\in G$	2p
b)	Pentru orice $X(p)\in G$, există $X\left(-\frac{p}{1+p}\right)$ astfel încât $X(p)\cdot X\left(-\frac{p}{1+p}\right)=X(0)$	3p
	$-\frac{p}{1+p}\neq -1\Rightarrow X\left(-\frac{p}{1+p}\right)\in G$ şi $X\left(-\frac{p}{1+p}\right)$ este inversul lui $X(p)$	2p
c)	$(X(p))^3=X(7)$	1p
	$(X(p))^3=X((p+1)^3-1)$	3p
	$(p+1)^3=8$, deci $p=1$ şi soluția este $X(1)$	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-12$	3p
	$f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in[2,+\infty)$, deci *f* este crescătoare pe $[2,+\infty)$	2p
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$	2p
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2-12}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty$	3p
c)	Şirul lui Rolle pentru funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)-a$ este $-\infty,16-a,-16-a,+\infty$	3p
	Ecuația are trei soluții reale distincte dacă şi numai dacă $a\in(-16,16)$	2p
2.a)	$F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$	2p
	$f(x)>0$ pentru orice $x\in(-1,+\infty)$	1p
	F este strict crescătoare	2p
b)	$\int_0^1\frac{f(x)}{x+1}dx=\int_0^1\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}dx=\int_0^1\frac{dx}{x+1}+\int_0^1\frac{dx}{x+2}=$	3p
	$=\ln(x+1)\Big\vert_0^1+\ln(x+2)\Big\vert_0^1=\ln 3$	2p
c)	$\int_x^{2x}f(t)dt=\left(2t-\ln(t+2)\right)\Big\vert_x^{2x}=2x-\ln\frac{2x+2}{x+2}$, pentru $x>0$	3p
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-\ln\frac{2x+2}{x+2}}{x}=2$	2p

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul real m ştiind că mulțimile $A=\{2\}$ şi $B=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2+mx+4=0\}$ sunt egale.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $3^{\log_3 x}<1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare unul dintre numerele naturale de 2 cifre, acesta să fie format doar din cifre impare.

5p **5.** Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=3\vec{i}+a\vec{j}$ şi $\vec{v}=a\vec{i}+(2a-3)\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $AB=AC=5$ şi $BC=6$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}\cos x&0&i\sin x\\0&1&0\\i\sin x&0&\cos x\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați $\det(A(\pi))$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $(A(x))^{2012}=I_3$.

2. Pe mulțimea $G=(0,1)$ se defineşte legea de compoziție asociativă $x\circ y=\dfrac{xy}{2xy-x-y+1}$.

5p **a)** Arătați că $e=\dfrac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **b)** Arătați că orice element din mulțimea G este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Demonstrați că $f:G\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\dfrac{1}{x}-1$ este un izomorfism de la grupul $(G,\circ)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{f(x)}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Arătați că funcția $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(\sqrt{x})$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numerele $I_n=\int_0^1 x^n\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx$ şi $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

5p **a)** Calculați J_1.

5p **b)** Calculați I_1.

5p **c)** Demonstrați că $J_{2n}-J_{2n+2}=I_{2n}$ pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$x^2+mx+4=0$ are soluția $x=2 \Rightarrow m=-4$ Pentru $m=-4$ cele două mulțimi sunt egale	**3p** **2p**
2.	$x_V=-\frac{b}{2a}=\frac{3}{2}$ $\Delta=1$ $y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{1}{4}$	**2p** **1p** **2p**
3.	Condiție: $x>0$ $3^{\log_3 x}<3^0 \Leftrightarrow x<1$ $x\in(0,1)$	**2p** **2p** **1p**
4.	$p=\frac{\text{nr.cazuri favorabile}}{\text{nr.cazuri posibile}}$ $\overline{ab}$ cu $a,b\in\{1,3,5,7,9\}$ sunt 25 de numere $\Rightarrow$ 25 de cazuri favorabile $\overline{ab}$ cu $a\in\{1,2,3,...,9\}$ şi $b\in\{0,1,2,3,...,9\}$ sunt 90 de numere $\Rightarrow$ 90 de cazuri posibile $p=\frac{5}{18}$	**1p** **2p** **1p** **1p**
5.	$\frac{3}{a}=\frac{a}{2a-3}$ $a^2-6a+9=0$ $a=3$	**2p** **2p** **1p**
6.	$S_{ABC}=12$ $R=\frac{abc}{4S}$ $R=\frac{25}{8}$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(\pi)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $\det A(\pi)=1$	**3p** **2p**

b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}\cos x\cos y-\sin x\sin y & 0 & i(\cos x\sin y+\sin x\cos y)\\ 0 & 1 & 0\\ i(\cos x\sin y+\sin x\cos y) & 0 & \cos x\cos y-\sin x\sin y\end{pmatrix}$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$ $A(x+y)=\begin{pmatrix}\cos(x+y) & 0 & i\sin(x+y)\\ 0 & 1 & 0\\ i\sin(x+y) & 0 & \cos(x+y)\end{pmatrix}$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$ Finalizare	**3p** **1p** **1p**
c)	$A^{2012}(x)=A(2012x)$ $A(2012x)=I_3 \Leftrightarrow \cos(2012x)=1$ şi $\sin(2012x)=0$ $x=\frac{k\pi}{1006}, k\in\mathbb{Z}$	**2p** **1p** **2p**
2.a)	$x\circ\frac{1}{2}=\frac{x\cdot\frac{1}{2}}{2x\cdot\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}+1}=x$, pentru orice $x\in G$ $\frac{1}{2}\circ x=\frac{\frac{1}{2}\cdot x}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}-x+1}=x$, pentru orice $x\in G$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
b)	$x\circ x'=\frac{xx'}{2xx'-x-x'+1}=\frac{x'x}{2x'x-x'-x+1}=x'\circ x$, pentru orice $x,x'\in G$ $x\circ x'=\frac{1}{2}\Rightarrow x'=1-x$ $x'\in(0,1)$	**1p** **3p** **1p**
c)	*f* este bijectivă $f(x\circ y)=\frac{1}{x\circ y}-1=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}$, pentru orice $x,y\in G$ $f(x)f(y)=\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}$, pentru orice $x,y\in G$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x-e^{-x}}=$ $=0$	**3p** **2p**
b)	$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ $f''(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ $f''(x)>0$, pentru orice *x* real , deci *f* este convexă	**1p** **2p** **2p**
c)	$g(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{2}\Rightarrow g'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}}$, pentru orice $x>0$ $x>0\Rightarrow\sqrt{x}>0\Rightarrow e^{\sqrt{x}}>e^{-\sqrt{x}}$ $g'(x)>0\Rightarrow g$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$	**2p** **2p** **1p**

2.a)	$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt$	**1p**
	$J_1 = -\cos t \Big\|_0^{\frac{\pi}{2}}$	**2p**
	$J_1 = 1$	**2p**
b)	$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx$	**1p**
	$I_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}\Big\|_0^1$	**3p**
	$I_1 = \frac{1}{3}$	**1p**
c)	$J_{2n} - J_{2n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \cos^2 x dx$	**2p**
	Cu schimbarea de variabilă $\sin x = t$ obținem $J_{2n} - J_{2n+2} = \int_0^1 t^{2n} \cdot \sqrt{1-t^2}\, dt = I_{2n}$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $n=\left(\sqrt{5}-1\right)^2+2\sqrt{5}$ este natural.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+4$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(2-x^2\right)=\log_2 x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile mulțimii $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, aceasta să aibă cel mult un element.

5p **5.** Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+6\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC}=4\vec{i}+6\vec{j}$. Determinați lungimea segmentului $[AC]$.

5p **6.** Se consideră numerele reale a și b astfel încât $a+b=\frac{\pi}{3}$. Arătați că $2\cos b=\cos a+\sqrt{3}\sin a$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se notează cu $D(x,y)$ determinantul matricei $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & y & x \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Calculați $D(-1,2)$.

5p **b)** Determinați numărul real q pentru care matricea $A(2,q)$ are rangul egal cu 2.

5p **c)** Arătați că există cel puțin o pereche (x,y) de numere reale, cu $x\neq y$, pentru care $D(x,y)=D(y,x)$.

2. Se notează cu x_1,x_2,x_3 rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului $f=X^3+X-m$, unde m este un număr real.

5p **a)** Determinați m astfel încât restul împărțirii polinomului $f(X)$ la $X-1$ să fie egal cu 8.

5p **b)** Arătați că numărul $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ este întreg, pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

5p **c)** În cazul $m=2$ determinați patru numere întregi a,b,c,d, cu $a>0$, astfel încât polinomul $g=aX^3+bX^2+cX+d$ să aibă rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

5p **a)** Calculați $f'(0)$.

5p **b)** Arătați că, pentru fiecare număr natural $n\geq 2$, ecuația $f(x)=n$ are exact o soluție în intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Fie x_n unica soluție din intervalul $(0,+\infty)$ a ecuației $f(x)=n$, unde n este număr natural, $n\geq 2$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$ și se notează cu S suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=\frac{\pi}{2}$.

5p **a)** Calculați aria suprafeței S.

5p **b)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația suprafeței S în jurul axei Ox.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^{2\pi} f^n(kx)\,dx=\int_0^{2\pi} f^n(x)\,dx$, pentru orice numere naturale $n,k\geq 1$.

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(\sqrt{5}-1)^2+2\sqrt{5}=\left(5-2\sqrt{5}+1\right)+2\sqrt{5}=$	**3p**
	$=6\in\mathbb{N}$	**2p**
2.	$f(x)=0$ are două soluții reale distincte	**2p**
	$\Delta=m^2-16>0$	**1p**
	$m\in(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$	**2p**
3.	$2-x^2=x$	**1p**
	$x_1=1,\ x_2=-2$	**2p**
	x_1 convine şi x_2 nu convine	**2p**
4.	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$	**1p**
	Numărul submulțimilor cu cel mult un element este egal cu $C_7^0+C_7^1=8\Rightarrow 8$ cazuri favorabile	**2p**
	Numărul submulțimilor mulțimii A este $2^7=128\Rightarrow 128$ de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{1}{16}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=5\vec{i}+12\vec{j}$	**3p**
	$AC=\sqrt{5^2+12^2}=13$	**2p**
6.	$b=\dfrac{\pi}{3}-a\Rightarrow\cos b=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-a\right)=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{2}\cos a+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin a$, de unde concluzia	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$D(-1,2)=\begin{vmatrix}-1&1&2\\2&-1&1\\1&2&-1\end{vmatrix}$	**1p**
	$D(-1,2)=-1+1+8+2+2+2$	**3p**
	$D(-1,2)=14$	**1p**
b)	$A(2,q)=\begin{pmatrix}2&1&2\\2&2&1\\1&q&2\end{pmatrix}$	**1p**
	Există minorul $d=\begin{vmatrix}2&1\\2&2\end{vmatrix}=2\neq0\Rightarrow$ rang $A(2,q)\geq2$	**1p**
	rang $A(2,q)=2\Rightarrow D(2,q)=0$	**1p**
	$q=-\dfrac{1}{2}$	**2p**

c)	$D(x,y)=x^3+4y-4x-xy+1$ $D(y,x)=y^3+4x-4y-yx+1$ $D(x,y)=D(y,x)\Rightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2-8)=0\Rightarrow x^2+xy+y^2-8=0$ Finalizare: de exemplu $(x,y)=(0,2\sqrt{2})$	**1p** **1p** **2p** **1p**
2.a)	$f(1)=2-m$ $f(1)=8$ Finalizare: $m=-6$	**2p** **2p** **1p**
b)	$x_1+x_2+x_3=0$ și $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-2\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)=-2\in\mathbb{Z}$	**2p** **3p**
c)	x_1,x_2,x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3+X-2\Rightarrow$ polinomul $-2X^3+X^2+1$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$ $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ cu $a>0\Rightarrow$ $g=2X^3-X^2+0\cdot X-1$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$ un exemplu este $a=2,\ b=-1,\ c=0,\ d=-1$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x-1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ $f'(0)=0$	**3p** **2p**
b)	$f(0)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă pe $\left[0,+\infty\right)$, deci ecuația dată are cel puțin o soluție $f'(x)>0$ pentru orice $x>0\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\left[0,+\infty\right)\Rightarrow f$ este injectivă pe $\left[0,+\infty\right)$, deci soluția este unică	**3p** **2p**
c)	$f\left(x_n\right)=n\Rightarrow e^{x_n}=n+x_n\Rightarrow e^{x_n}>n$ pentru că $x_n>0$, oricare ar fi $n\geq 2$ $x_n>\ln n\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$	**2p** **3p**
2.a)	$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\lvert f(x)\rvert dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=$ $=\sin x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}=1$	**2p** **3p**
b)	$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=$ $=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{\pi}{2}\left(x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\sin 2x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi^2}{4}$	**1p** **4p**
c)	$t=kx\Rightarrow \int_0^{2\pi}f^n(kx)\,dx=\frac{1}{k}\int_0^{2k\pi}\cos^n t\,dt$ $\int_0^{2k\pi}\cos^n t\,dt=\int_0^{2\pi}\cos^n t\,dt+\int_{2\pi}^{4\pi}\cos^n t\,dt+\ldots+\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}\cos^n t\,dt=$	**2p** **2p**

	$=k\int\limits_0^{2\pi}\cos^n t\,dt$, deoarece $g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g_n(x)=\cos^n x$ este periodică de perioadă 2π, de unde concluzia	**1p**

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $a=3(3-2i)+2(5+3i)$ este real.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-1$. Calculați $f(1)+f(2)+\ldots+f(10)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x)=\log_2(1+x)$.

5p **4.** După o scumpire cu 10% prețul unui produs este 2200 de lei. Calculați prețul produsului înainte de scumpire.

5p **5.** Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=\vec{i}+4\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, știind că $\dfrac{3\sin x+\cos x}{\sin x}=4$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & a^2 & 1\\ b & b^2 & 1\end{vmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $D(2,3)=2$.

5p **b)** Verificați dacă $D(a,b)=(a-1)(b-1)(b-a)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_n\left(n,n^2\right)$, unde n este un număr natural nenul. Determinați numărul natural n, $n\geq 3$, pentru care aria triunghiului $P_1P_2P_n$ este egală cu 1.

2. Se consideră x_1,x_2,x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3-4X^2+3X-m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=4$, arătați că $f(4)=8$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care rădăcinile polinomului f verifică relația $x_1+x_2=x_3$.

5p **c)** Dacă $x_1^3+x_2^3+x_3^3=7(x_1+x_2+x_3)$, arătați că f se divide cu $X-3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x+\dfrac{x^2}{2}$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx$.

5p **a)** Calculați I_1.

5p **b)** Arătați că $I_{n+1}+(n+1)I_n=e$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Arătați că $1\leq(n+1)I_n\leq e$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3(3-2i)=9-6i$	**2p**
	$2(5+3i)=10+6i$	**2p**
	$a=19\in\mathbb{R}$	**1p**
2.	$f(1)+f(2)+...+f(10)=4\cdot(1+2+...+10)-10=$	**3p**
	$=210$	**2p**
3.	$2x=1+x$	**3p**
	Rezultă $x=1$, care verifică ecuaţia	**2p**
4.	Se notează cu x preţul iniţial $x+10\%\cdot x=2200$	**2p**
	Preţul înainte de scumpire este 2000 de lei	**3p**
5.	$\frac{2}{1}=\frac{a+1}{4}$	**3p**
	$a=7$	**2p**
6.	$3\sin x+\cos x=4\sin x\Rightarrow\sin x=\cos x$	**3p**
	$x=\frac{\pi}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(2,3)=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&4&1\\3&9&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2$	**3p**
b)	$D(a,b)=\begin{vmatrix}0&0&1\\a-1&a^2-1&1\\b-1&b^2-1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(a-1)(b-1)\begin{vmatrix}1&a+1\\1&b+1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(a-1)(b-1)(b-a)$, pentru orice numere reale a şi b	**1p**
c)	$\mathcal{A}_{\Delta P_1P_2P_n}=\frac{1}{2}\cdot\lvert\Delta\rvert$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2^2&1\\n&n^2&1\end{vmatrix}=(n-1)(n-2)$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta P_1P_2P_n}=1\Leftrightarrow(n-1)(n-2)=2\Leftrightarrow n=3$	**3p**
2.a)	$f=X^3-4X^2+3X-4$	**2p**
	$f(4)=4^3-4\cdot4^2+3\cdot4-4=8$	**3p**
b)	$x_1+x_2+x_3=4$	**1p**
	$x_1+x_2=x_3\Rightarrow x_3=2$	**2p**
	$f(2)=0\Leftrightarrow m=-2$	**2p**

c)	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=3m+28$ $x_1^3+x_2^3+x_3^3=7(x_1+x_2+x_3)\Rightarrow m=0$ Dacă $m=0$, atunci $f(3)=0$, deci f se divide cu $X-3$	**2p** **1p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\cos x+\frac{x^2}{2}\right)'=(\cos x)'+\left(\frac{x^2}{2}\right)'=$ $=-\sin x+2\cdot\frac{x}{2}=x-\sin x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	$y-f(0)=f'(0)(x-0)$ $f(0)=1$, $f'(0)=0$ Ecuaţia tangentei este $y=1$	**2p** **2p** **1p**
c)	$f''(x)=-\cos x+1\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$ $f'(x)\leq 0$, pentru $x\in(-\infty,0]$ şi $f'(x)\geq 0$, pentru $x\in[0,+\infty)$ $f(x)\geq f(0)\Rightarrow f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**2p** **2p** **1p**
2.a)	$I_1=\int_0^1 xe^x dx=xe^x\Big\vert_0^1-\int_0^1 e^x dx=$ $=e-e^x\Big\vert_0^1=1$	**3p** **2p**
b)	$I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^x dx=x^{n+1}e^x\Big\vert_0^1-(n+1)\int_0^1 x^n e^x dx=$ $=e-(n+1)I_n\Rightarrow I_{n+1}+(n+1)I_n=e$	**3p** **2p**
c)	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi $x\in[0,1]$, avem $1\leq e^x\leq e$ şi $x^n\geq 0\Rightarrow x^n\leq x^n e^x\leq x^n e$ $\int_0^1 x^n dx\leq\int_0^1 x^n e^x dx\leq e\int_0^1 x^n dx\Rightarrow 1\leq(n+1)I_n\leq e$	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali, ştiind că $b_1=1$ şi $b_4=27$.
5p	**2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+8$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+2}=9^{1-x}$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.
5p	**5.** Se consideră punctele A, B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}-5\vec{j}$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.
5p	**6.** Calculaţi sinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=4$, $BC=5$ şi $\sin C=\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ m & 0 & 0\\ m & 0 & m\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Calculaţi $\det\big(A(1)\big)$.
5p	**b)** Determinaţi numerele reale m știind că $A(m)\cdot A(-m)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.
5p	**c)** Arătaţi că $\det\big(A(1)+A(2)+\ldots+A(101)\big)=-51^2\cdot 101^3$.
	2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x\circ y=xy-4x-4y+20$.
5p	**a)** Calculaţi $3\circ 4$.
5p	**b)** Arătaţi că $x\circ y=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x şi y.
5p	**c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{x\text{ de 2013 ori}}=5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x+e^x}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{\left(x+e^x\right)^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstrați că $f(x)\geq\dfrac{e}{e+1}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 xe^{-nx^2}dx$.
5p	**a)** Calculaţi I_0.
5p	**b)** Arătaţi că $I_{n+1}\leq I_n$, pentru orice număr natural n.
5p	**c)** Demonstraţi că $I_n=\dfrac{1}{2n}\left(1-\dfrac{1}{e^n}\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_4 = b_1 q^3 \Rightarrow q^3 = 27$ $q = 3$	**3p** **2p**
2.	$x_V = 3$ $y_V = -1$	**2p** **3p**
3.	$3^{x+2} = 3^{2(1-x)} \Rightarrow x + 2 = 2 - 2x$ $x = 0$	**3p** **2p**
4.	Numerele de două cifre, pătrate perfecte, sunt 16, 25, 36, 49, 64 şi 81 $\Rightarrow$ 6 cazuri favorabile Numărul de numere naturale de două cifre este 90 $\Rightarrow$ 90 de cazuri posibile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{1}{15}$	**2p** **1p** **2p**
5.	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$ $AC = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$	**3p** **2p**
6.	$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$ $\sin A = 1$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= -1$	**2p** **3p**
b)	$A(m) \cdot A(-m) = \begin{pmatrix} 1-2m & 1 & 1-m \\ m & m & m \\ m-m^2 & m & m-m^2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1-2m & 1 & 1-m \\ m & m & m \\ m-m^2 & m & m-m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m = 1$	**3p** **2p**
c)	$A(1) + A(2) + \ldots + A(101) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 101 & 0 & 0 \\ 101 & 0 & 101 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 101 & 101 & 101 \\ 101\cdot 51 & 0 & 0 \\ 101\cdot 51 & 0 & 101\cdot 51 \end{pmatrix}$ $\det(A(1) + A(2) + \ldots + A(101)) = \begin{vmatrix} 101 & 101 & 101 \\ 101\cdot 51 & 0 & 0 \\ 101\cdot 51 & 0 & 101\cdot 51 \end{vmatrix} = -51^2 \cdot 101^3$	**3p** **2p**

2.a)	$3\circ 4=3\cdot 4-4\cdot 3-4\cdot 4+20=$	**3p**
	$=4$	**2p**
b)	$x\circ y=x(y-4)-4(y-4)+4=$	**3p**
	$=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x şi y	**2p**
c)	$x\circ x=(x-4)^2+4$	**1p**
	$\underbrace{x\circ x\circ ...\circ x}_{x \text{ de } 2013 \text{ ori}}=(x-4)^{2013}+4$	**2p**
	$(x-4)^{2013}+4=5\Rightarrow x=5$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{e^x\left(x+e^x\right)-e^x\left(1+e^x\right)}{\left(x+e^x\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{(x-1)e^x}{\left(x+e^x\right)^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x+e^x}=1$	**3p**
	Ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f este $y=1$	**2p**
c)	$f'(1)=0$; $f'(x)\le 0$, pentru $x\in(0,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru $x\in[1,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\ge f(1)\Rightarrow f(x)\ge\dfrac{e}{e+1}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$I_0=\int_0^1 x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}$	**2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1 xe^{-nx^2}\left(e^{-x^2}-1\right)dx$	**2p**
	Pentru orice $n\in\mathbb{N}$ şi $x\in[0,1]$ avem $e^{-nx^2}>0$ şi $e^{-x^2}-1\le 0\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$	**3p**
c)	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem $I_n=\int_0^1 xe^{-nx^2}dx=-\dfrac{1}{2n}\int_0^1(e^{-nx^2})'dx=$	**3p**
	$=-\dfrac{1}{2n}e^{-nx^2}\Big\|_0^1=\dfrac{1}{2n}\left(1-\dfrac{1}{e^n}\right)$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi numărul real x pentru care numerele 1, $2x+2$ şi 7 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Calculaţi distanţa dintre punctele de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+4}=x+2$.

5p **4.** Determinaţi câte numere naturale impare $\overline{ab}$ se pot forma, ştiind că $a,b\in\{2,3,4,5\}$ şi $a\neq b$.

5p **5.** În dreptunghiul $ABCD$, cu $AB=8$ şi $BC=6$, se consideră vectorul $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AD}$, unde $\{O\}=AC\cap BD$. Calculaţi lungimea vectorului $\vec{v}$.

5p **6.** Calculaţi sinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=6$, $BC=10$ şi $\sin C=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați $\det(A(0))$.

5p **b)** Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care $5A(a)-(A(a))^2=4I_3$.

5p **c)** Determinaţi inversa matricei $A(2)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-mX^2+3X-1$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculați $f(2)-f(-2)$.

5p **b)** Determinaţi restul împărţirii lui f la $X+2$, ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X-2$ este egal cu 9.

5p **c)** Determinaţi numerele reale m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in(-1,1)$.

5p **b)** Verificaţi dacă funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(-1,1)$.

5p **c)** Determinaţi punctele de inflexiune a funcţiei f.

2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_1^2 x^n e^x dx$.

5p **a)** Calculaţi I_0.

5p **b)** Arătaţi că $I_1=e^2$.

5p **c)** Demonstraţi că $I_{n+1}+(n+1)I_n=2^{n+1}e^2-e$, pentru orice număr natural n.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2x+2=\frac{1+7}{2}$	**3p**
	$x=1$	**2p**
2.	$f(x)=0 \Rightarrow x=1$ sau $x=3$	**3p**
	Distanţa este egală cu 2	**2p**
3.	$x^2+4=x^2+4x+4$	**3p**
	Rezultă $x=0$, care verifică ecuaţia	**2p**
4.	b impar $\Rightarrow b\in\{3,5\} \Rightarrow$ sunt două variante de alegere a lui b	**2p**
	Pentru fiecare b impar sunt trei variante de alegere a lui a	**2p**
	Se pot forma $2\cdot 3=6$ numere	**1p**
5.	$\vec{v}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AO}=3\overrightarrow{AO}$	**3p**
	$\lvert\vec{v}\rvert=15$	**2p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$	**2p**
	$\sin A=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+1+1-0-0-0=2$	**3p**
b)	$(A(a))^2=\begin{pmatrix}a^2+2&2a+1&2a+1\\2a+1&a^2+2&2a+1\\2a+1&2a+1&a^2+2\end{pmatrix}$	**2p**
	$5A(a)-(A(a))^2=\begin{pmatrix}5a-a^2-2&4-2a&4-2a\\4-2a&5a-a^2-2&4-2a\\4-2a&4-2a&5a-a^2-2\end{pmatrix}$	**1p**
	$5A(a)-(A(a))^2=4I_3 \Rightarrow 5a-a^2-2=4$ şi $4-2a=0 \Rightarrow a=2$	**2p**
c)	$A(2)\cdot(5I_3-A(2))=4I_3$ şi $(5I_3-A(2))\cdot A(2)=4I_3$	**2p**
	Matricea $A(2)$ este inversabilă şi inversa ei este $B=\frac{1}{4}(5I_3-A(2))=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$	**3p**

2.a)	$f(2)=8-4m+6-1=-4m+13$ $f(-2)=-8-4m-6-1=-4m-15 \Rightarrow f(2)-f(-2)=28$	**2p** **3p**
b)	Restul împărţirii lui f la $X-2$ este $f(2) \Rightarrow f(2)=9$ Restul împărţirii lui f la $X+2$ este $f(-2) \Rightarrow f(-2)=-19$	**2p** **3p**
c)	$x_1+x_2+x_3=m$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=3 \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=m^2-6$ $x_1^3+x_2^3+x_3^3=m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-3\left(x_1+x_2+x_3\right)+3=m^3-9m+3$ $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3 \Leftrightarrow m^3-9m=0 \Leftrightarrow m=-3$ sau $m=0$ sau $m=3$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1+x}{1-x}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'=$ $=-\frac{2}{1-x^2}=\frac{2}{x^2-1}$, pentru orice $x\in(-1,1)$	**3p** **2p**
b)	$x^2-1<0$, pentru orice $x\in(-1,1)$ $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-1,1) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-1,1)$	**2p** **3p**
c)	$f''(x)=-\frac{4x}{(x^2-1)^2}$, pentru orice $x\in(-1,1)$ $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ $f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\left(-1,0\right]$, $f''(x)\leq 0$, pentru orice $x\in\left[0,1\right)$, deci punctul de inflexiune este $x=0$	**2p** **1p** **2p**
2.a)	$I_0=\int_1^2 e^x dx=$ $=e^x\Big\vert_1^2=e^2-e$	**2p** **3p**
b)	$I_1=\int_1^2 xe^x dx=xe^x\Big\vert_1^2-\int_1^2 e^x dx=$ $=e^2$	**3p** **2p**
c)	$I_{n+1}=\int_1^2 x^{n+1}e^x dx=\int_1^2 x^{n+1}\left(e^x\right)'dx=$ $=x^{n+1}e^x\Big\vert_1^2-(n+1)I_n \Rightarrow I_{n+1}+(n+1)I_n=2^{n+1}e^2-e$	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$ ştiind că $a_1 = 6$ și $a_2 = 12$.

5p **2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+4$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(3^x-1)(3^x-3)=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să conțină cifra 1.

5p **5.** Se consideră triunghiul echilateral ABC cu $AB=2$. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

5p **6.** Calculați aria triunghiului isoscel ABC ştiind că $A=\frac{\pi}{2}$ și $AC=4$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & a\\ a & 2 & 2\\ a & a & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(0))=8$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.

5p **c)** Determinați matricea $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ știind că $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 4\end{pmatrix}$.

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3-2X^2+3X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculați $f(1)$.

5p **b)** Arătaţi că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2$.

5p **c)** Determinați numărul real m știind că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=8$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătaţi că $f(x)\le\frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{11}{6}$.

5p **b)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{f(x)}dx$. Arătaţi că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Determinaţi numărul real pozitiv a ştiind că $\int_0^a\frac{2x+1}{f(x)}dx=\ln 3$.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_3 = 18$	**2p**
	$a_1 + a_2 + a_3 = 36$	**3p**
2.	$x_V = -1$	**2p**
	$y_V = 3$	**3p**
3.	$3^x = 1$ sau $3^x = 3$	**2p**
	$x = 0$ sau $x = 1$	**3p**
4.	Sunt 18 numere de două cifre care conțin cifra 1, deci sunt 18 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{18}{90} = \dfrac{1}{5}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	**2p**
	ΔABC echilateral $\Rightarrow AC = 2$	**3p**
6.	ΔABC dreptunghic isoscel $\Rightarrow AB = 4$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \dfrac{4 \cdot 4}{2} = 8$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 8 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 8$	**3p**
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & 2 \\ a & a & 2 \end{vmatrix} = (a-2)^2(a+2)$	**3p**
	$(a-2)^2(a+2) = 0 \Leftrightarrow a = -2$ sau $a = 2$	**2p**
c)	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + 2z = 5 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$	**2p**
	$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + m =$	**2p**
	$= m + 2$	**3p**
b)	$x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3$	**2p**
	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 2^2 - 2 \cdot 3 = -2$	**3p**

c)	$\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)-2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+3\left(x_1+x_2+x_3\right)+3m=0$	**2p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-3m-10 \Rightarrow m=-6$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuaţie $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f'(e)=0$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,e)$ și $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(e,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\le f(e)\Rightarrow f(x)\le\dfrac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2+x+1\right)dx=\left.\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{11}{6}$	**2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\dfrac{x^n(x-1)}{x^2+x+1}dx$ pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și $x\in[0,1]$ avem $x^n\ge0, x-1\le0$ și $x^2+x+1>0\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$	**3p**
c)	$\int_0^a\dfrac{2x+1}{f(x)}dx=\int_0^a\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\left.\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right)\right\|_0^a=\ln\left(a^2+a+1\right)$	**3p**
	$\ln\left(a^2+a+1\right)=\ln3\Leftrightarrow a^2+a+1=3$ care are soluția pozitivă $a=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Simulare pentru elevii clasei a XII-a

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numerele reale a și b, știind că $\frac{1+i}{1-i}=a+ib$ și $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție cu axele de coordonate a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+8$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^{\frac{x+2}{2}}+3^{x+1}=36$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să nu conțină cifra 6.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$, $B(2,3)$ și $C(0,-2)$. Determinați ecuația paralelei duse prin C la AB.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\frac{1+\sin x}{\sin x}=\frac{1+\cos x}{\cos x}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=(a+2)(a-1)^2$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Calculați inversa matricei $A(-1)$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **c)** Determinați perechile de numere naturale (a,b) pentru care matricea $A(a)\cdot A(b)$ are suma elementelor egală cu 24.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3xy-3x-3y+4$. Legea „$*$” este asociativă și are element neutru.

5p **a)** Arătați că $x*y=3(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Calculați $\frac{1}{1007}*\frac{2}{1007}*\frac{3}{1007}*...*\frac{2014}{1007}$.

5p **c)** Determinați numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor față de legea „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2}{x-1}$.

5p **a)** Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{x+3}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx$.

5p **a)** Calculaţi I_1.

5p **b)** Arătați că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)I_n=\frac{1}{2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Simulare pentru elevii clasei a XII-a

Barem de evaluare şi de notare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1+i}{1-i}=i\Rightarrow a+ib=i$	**3p**
	$a=0,\ b=1$	**2p**
2.	$f(x)=0\Rightarrow x^2-6x+8=0\Rightarrow x_1=2,\ x_2=4\Rightarrow G_f\cap Ox=\{(2,0),(4,0)\}$	**3p**
	$f(0)=8\Rightarrow G_f\cap Oy=\{(0,8)\}$	**2p**
3.	$3^{x+2}+3^{x+1}=36\Leftrightarrow 3^{x+1}=9$	**2p**
	$x+1=2\Leftrightarrow x=1$	**3p**
4.	Sunt 72 de numere naturale de două cifre care nu conțin cifra 6, deci sunt 72 de cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{72}{90}=\frac{4}{5}$	**2p**
5.	$m_{AB}=\frac{1}{3},\ d\parallel AB\Rightarrow m_d=\frac{1}{3}$, unde d este paralela prin C la AB	**3p**
	$d:y=\frac{1}{3}x-2$	**2p**
6.	$\cos x+\sin x\cos x=\sin x+\sin x\cos x\Leftrightarrow\cos x=\sin x$	**2p**
	$x=\frac{\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+2&1&1\\a+2&a&1\\a+2&1&a\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix}1&0&0\\1&a-1&0\\1&0&a-1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=(a+2)\begin{vmatrix}a-1&0\\0&a-1\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$	**2p**
b)	$\det(A(-1))=4$	**2p**
	Inversa matricei $A(-1)$ este $\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$	**3p**

c)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix} ab+2 & a+b+1 & a+b+1 \\ a+b+1 & ab+2 & a+b+1 \\ a+b+1 & a+b+1 & ab+2 \end{pmatrix}$	**2p**
	$3ab+6a+6b+12=24\Rightarrow(a+2)(b+2)=8$	**1p**
	Perechile de numere naturale care verifică cerința sunt $(0,2)$ și $(2,0)$	**2p**
2.a)	$3xy-3x-3y+4=3(xy-x-y+1)+1=$	**3p**
	$=3(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$x*1=1*x=1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{1}{1007}*\frac{2}{1007}*\frac{3}{1007}*\ldots*\frac{2014}{1007}=\left(\frac{1}{1007}*\ldots*\frac{1006}{1007}\right)*\frac{1007}{1007}*\left(\frac{1008}{1007}*\ldots*\frac{2014}{1007}\right)=1$	**3p**
c)	Elementul neutru este $\frac{4}{3}$	**1p**
	$x*x=\frac{4}{3}\Leftrightarrow 3(x-1)^2+1=\frac{4}{3}\Leftrightarrow(x-1)^2=\frac{1}{9}$	**2p**
	$x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{4}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=1\Rightarrow$ dreapta $y=x+1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
b)	$f(2)=6$, $f'(2)=-2$	**3p**
	Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Rightarrow y=-2x+10$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-x}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{x+2}{x^2-x}\right)^{\frac{x^2-x}{x+2}}\right]^{\frac{x+2}{x^2-x}\cdot(x+3)}=$	**3p**
	$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x+6}{x^2-x}}=e$	**2p**
2.a)	$I_1=\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=$	**2p**
	$=1-\ln 2$	**3p**
b)	$I_{n+1}+I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+1}dx+\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x^n(x+1)}{x+1}dx=$	**3p**
	$=\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right\|_0^1=\frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
c)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{x+1}dx\le 0$, pentru orice număr natural nenul n	**1p**
	$2I_{n+1}\le\frac{1}{n+1}\le 2I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$\frac{1}{2}\le(n+1)I_n\le\frac{n+1}{2n}$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$	**1p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)I_n=\frac{1}{2}$	**1p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul real x știind că numerele 2, 4 și $x+5$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+4$ este situată deasupra axei Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2-1}=2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,4)$ și $B(1,2)$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{OM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, calculați $\sin 2x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 2x & 0\\ 0 & 4x+1 & 0\\ 0 & 3x & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+4xy)$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x, $x\neq-\frac{1}{4}$, pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-4X+2a$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $f(0)$.

5p **b)** Determinați numărul real a știind că $1+i$ este rădăcină a polinomului f.

5p **c)** Pentru $a=3$, arătați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-31$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=4$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^3+1}dx$.

5p **a)** Arătați că $I_2=\frac{1}{3}\ln 2$.

5p **b)** Arătați că $I_{n+3}+I_n=\frac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2\cdot(x+5)=4^2$	**2p**
	$x=3$	**3p**
2.	$\Delta=1-16=-15$	**2p**
	$a=1>0$ și $\Delta<0\Rightarrow$ parabola asociată funcției f este situată deasupra axei Ox	**3p**
3.	$x^2-1=8\Leftrightarrow x^2-9=0$	**3p**
	$x_1=-3$ și $x_2=3$	**2p**
4.	Sunt 7 numere de două cifre care au suma cifrelor egală cu 7, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{7}{90}$	**2p**
5.	$M(0,3)$	**2p**
	$OM=3$	**3p**
6.	$x=\dfrac{\pi}{6}$	**2p**
	$\sin 2x=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(0))=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1&2x&0\\0&4x+1&0\\0&3x&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2y&0\\0&4y+1&0\\0&3y&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2x+2y+8xy&0\\0&4x+4y+16xy+1&0\\0&3x+3y+12xy&1\end{pmatrix}$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&2(x+y+4xy)&0\\0&4(x+y+4xy)+1&0\\0&3(x+y+4xy)&1\end{pmatrix}=A(x+y+4xy)$ pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A(x)\cdot A(x)=I_3\Rightarrow A\left(2x+4x^2\right)=A(0)\Rightarrow 2x+4x^2=0$	**3p**
	$x_1=0$ și $x_2=-\dfrac{1}{2}$	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3+0^2-4\cdot 0+2a=$	**2p**
	$=2a$	**3p**
b)	$x_1=1+i\Rightarrow x_2=1-i$	**1p**
	$x_1+x_2+x_3=-1\Rightarrow x_3=-3$	**2p**
	$x_1x_2x_3=-2a\Rightarrow a=3$	**2p**

c)	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=(1+i)^3+(1-i)^3+(-3)^3=$	**3p**
	$=(2i-2)+(-2i-2)-27=-31$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\left(x^2\right)'\cdot(x-2)-x^2\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$	**3p**
b)	$y-f(4)=f'(4)(x-4)$	**2p**
	$f(4)=8$, $f'(4)=0$, deci ecuaţia tangentei este $y=8$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=4$	**1p**
	$f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in(2,4]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(2,4]$	**2p**
	$f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[4,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[4,+\infty)$	**2p**
2.a)	$I_2=\int_0^1\dfrac{x^2}{x^3+1}dx=\dfrac{1}{3}\int_0^1\dfrac{3x^2}{x^3+1}dx=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{3}\ln\left(x^3+1\right)\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{3}\ln 2$	**3p**
b)	$I_{n+3}+I_n=\int_0^1\dfrac{x^{n+3}}{x^3+1}dx+\int_0^1\dfrac{x^n}{x^3+1}dx=\int_0^1\dfrac{x^n\left(x^3+1\right)}{x^3+1}dx=$	**3p**
	$=\int_0^1 x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n	**2p**
c)	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și $x\in[0,1]$ avem $x^n\ge 0,\ x^3+1>0\Rightarrow I_n\ge 0$	**2p**
	$I_{n+3}\ge 0$ și $I_{n+3}+I_n=\dfrac{1}{n+1}\Rightarrow 0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Calculați z^2.

5p **2.** Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+6$ **nu** intersectează axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x-3)=\log_2(x+1)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie impar.

5p **5.** În triunghiul ABC punctele M, N și P sunt mijloacele laturilor AB, BC și, respectiv, AC. Arătați că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

5p **6.** Știind că $\operatorname{tg} a=\sqrt{3}$ și $a\in\mathbb{R}$, arătați că $\dfrac{\sin a-\cos a}{\cos a+\sin a}=2-\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&2\\1&2&a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-1$.

5p **b)** Determinați numerele reale m știind că $\det(A(m))=0$.

5p **c)** Determinați numerele reale a astfel încât $A(a)\cdot A(a)-A(a^2)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&5&-5\\1&-5&5\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=3x+3y-xy-6$.

5p **a)** Calculați $1*3$.

5p **b)** Arătați că $x*y=3-(x-3)(y-3)$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\underbrace{x*x*...*x}_{x \text{ de } 2014 \text{ ori}}=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(1-x)(x-3)}{(x^2-4x+5)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_1^e x\ln^n x\,dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1=\dfrac{e^2+1}{4}$.

5p **b)** Arătați că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$ pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2=(1+i)^2=1+2i+i^2=$ $=2i$	**2p** **3p**
2.	$\Delta=16-24=-8$ $\Delta<0$, deci parabola asociată funcției f **nu** intersectează axa Ox	**3p** **2p**
3.	$2x-3=x+1$ $x=4$ care verifică ecuația	**2p** **3p**
4.	Sunt 45 de numere impare de două cifre, deci sunt 45 de cazuri favorabile Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}$	**2p** **1p** **2p**
5.	$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=$ $=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0}$	**2p** **3p**
6.	$\frac{\sin a-\cos a}{\cos a+\sin a}=\frac{\cos a\left(\frac{\sin a}{\cos a}-1\right)}{\cos a\left(1+\frac{\sin a}{\cos a}\right)}=\frac{\mathrm{tg}a-1}{1+\mathrm{tg}a}=$ $=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&1\end{vmatrix}=$ $=1+2+2-1-4-1=-1$	**2p** **3p**
b)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&m&2\\1&2&m\end{vmatrix}=m^2-2m$ $m^2-2m=0\Leftrightarrow m_1=0$ și $m_2=2$	**3p** **2p**
c)	$A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}3&a+3&a+3\\a+3&a^2+5&4a+1\\a+3&4a+1&a^2+5\end{pmatrix}$, $A(a^2)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a^2&2\\1&2&a^2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2&a+2&a+2\\a+2&5&4a-1\\a+2&4a-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&5&-5\\1&-5&5\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=-1$	**3p** **2p**

2.a)	$1*3=3\cdot 1+3\cdot 3-1\cdot 3-6=$	**3p**
	$=3$	**2p**
b)	$x*y=3-xy+3x+3y-9=$	**2p**
	$=3-x(y-3)+3(y-3)=3-(x-3)(y-3)$ pentru orice numere reale x şi y	**3p**
c)	$3-(x-3)^{2014}=x$	**3p**
	$x_1=3$ şi $x_2=2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(x-2)'\left(x^2-4x+5\right)-(x-2)\left(x^2-4x+5\right)'}{\left(x^2-4x+5\right)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{-x^2+4x-3}{\left(x^2-4x+5\right)^2}=\dfrac{(1-x)(x-3)}{\left(x^2-4x+5\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuaţie $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x_1=1$ şi $x_2=3$	**2p**
	$f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in(-\infty,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,1]$	**1p**
	$f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[1,3]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,3]$	**1p**
	$f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in[3,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[3,+\infty)$	**1p**
2.a)	$I_1=\int_1^e x\ln x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e-\dfrac{1}{2}\int_1^e x\,dx=$	**3p**
	$=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{e^2+1}{4}$	**2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_1^e x(\ln x-1)\ln^n x\,dx$	**2p**
	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi $x\in[1,e]$ avem $\ln x\ge 0$ şi $\ln x-1\le 0\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$	**3p**
c)	$I_{n+1}=\int_1^e x\ln^{n+1}x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\ln^{n+1}x\Big\vert_1^e-\int_1^e\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}(n+1)\ln^n x\,dx=$	**3p**
	$=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{n+1}{2}\int_1^e x\ln^n x\,dx\Rightarrow 2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$ pentru orice număr natural nenul n	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $3(2+4i)+2(1-6i)=8$.

5p **2.** Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+1$ este tangentă la axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x^2+4}=5^{4x}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu cifrele 1, 3, 5 și 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,2)$, $B(-4,-2)$ și $C(4,2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin A și este perpendiculară pe dreapta BC.

5p **6.** Arătați că $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 2^n-1 & 1\end{pmatrix}$, unde n este număr natural.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinați numărul natural n știind că $A(n)\cdot A(1)=A(3)$.

5p **c)** Determinați numerele naturale p și q știind că $A(p)\cdot A(q)=A(pq)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-3X+2$.

5p **a)** Calculați $f(0)$.

5p **b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la X^2-4.

5p **c)** Arătați că $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=20$ știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+e^x$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $f(x)\geq 4x+1$ pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x^2+x+1)f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 (f(x)-x+1)\,dx=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

5p **c)** Arătați că $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)\,dx\right)=\frac{1}{4}$.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$6+12i+2-12i=$	**3p**
	$=6+2=8$	**2p**
2.	$\Delta=4-4=$	**3p**
	$=0$, deci parabola asociată funcției f este tangentă la axa Ox	**2p**
3.	$x^2+4=4x \Leftrightarrow x^2-4x+4=0$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Cifra unităților se poate alege în 4 moduri	**3p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot 3=12$ numere	**2p**
5.	Panta dreptei BC este $m_{BC}=\frac{1}{2} \Rightarrow m_d=-2$	**2p**
	$d: y=-2x-2$	**3p**
6.	$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$, $A(n)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^{n+1}&0\\0&2^{n+1}-1&1\end{pmatrix}$	**3p**
	$A(3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^3&0\\0&2^3-1&1\end{pmatrix}$ și $A(n)\cdot A(1)=A(3)\Rightarrow n=2$	**2p**
c)	$A(p)\cdot A(q)=A(p+q)$ pentru orice numere naturale p și q	**2p**
	$A(p+q)=A(pq)\Rightarrow p+q=pq\Rightarrow (p-1)(q-1)=1\Rightarrow p=q=0$ sau $p=q=2$	**3p**
2.a)	$f(0)=0^3+0^2-3\cdot 0+2=$	**3p**
	$=2$	**2p**
b)	Câtul este $X+1$	**3p**
	Restul este $X+6$	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=-1$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-3$	**2p**
	$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=2(x_1+x_2+x_3)^2-6(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=20$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(3x)'+\left(e^x\right)'=$	**2p**
	$=3+e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+e^x}{x}=3$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, deci dreapta de ecuație $y=3x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$g'(0)=0$, $g'(x)<0$ pentru orice $x\in(-\infty,0)$ și $g'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-4x-1=e^x-x-1$	**3p**
	$g(x)\ge g(0)\Rightarrow g(x)\ge 0\Rightarrow f(x)\ge 4x+1$ pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^1\left(x^2+x+1\right)f(x)dx=\int\limits_0^1 x^3\,dx=$	**2p**
	$=\frac{x^4}{4}\Big\|_0^1=\frac{1}{4}$	**3p**
b)	$\int\limits_0^1\left(f(x)-x+1\right)dx=\int\limits_0^1\frac{1}{x^2+x+1}dx=\int\limits_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$	**2p**
c)	$\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int\limits_0^t f(x)dx\right)=\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t)}{4t^3}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{t\to0}\frac{t^3}{4t^3\left(t^2+t+1\right)}=\frac{1}{4}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi partea reală a numărului complex $z=1+2i+3i^2$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x-5$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2-x}=3^{2x}$.

5p **4.** Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre, se pot forma cu cifrele 0, 1, 2 şi 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}+2\vec{j}$ și $\overrightarrow{AC}=(m+1)\vec{i}+4\vec{j}$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m știind că $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=AC=3$ și $BC=3\sqrt{2}$. Determinați $\cos C$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0\\ 2x^2-2x & 4x & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Arătaţi că $A(x+y)=A(x)\cdot A(y)$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x știind că $A(x^2+2)=A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+aX-2$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(2)=2(a-3)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a ştiind că polinomul f este divizibil prin X^2-X+1.

5p **c)** Pentru $a=3$, rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(2^x)=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{xe^x}{x+2}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{(x^2+2x+2)e^x}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi că ecuaţia $f(x)=1$ are cel puțin o soluţie în intervalul $(1,2)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x^n}dx$.

5p **a)** Arătaţi că $I_1=1-\ln 2$.

5p **b)** Arătaţi că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=-2+2i$ Partea reală a numărului z este egală cu -2	**2p** **3p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x-1=3x-5$ $x=2$ și $y=1$	**3p** **2p**
3.	$x^2-x=2x\Leftrightarrow x^2-3x=0$ $x_1=0$ și $x_2=3$	**3p** **2p**
4.	Cifra unităților poate fi 0 sau 2 Cifra zecilor poate fi aleasă în câte 3 moduri, deci se pot forma $3\cdot 2=6$ numere	**2p** **3p**
5.	$(m+1)\vec{i}+4\vec{j}=2\left(3\vec{i}+2\vec{j}\right)$ $m=5$	**2p** **3p**
6.	ΔABC este dreptunghic isoscel $\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$ $=1+0+0-0-0-0=1$	**2p** **3p**
b)	$A(x+y)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x+y&1&0\\2(x+y)^2-2(x+y)&4(x+y)&1\end{pmatrix}$ $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x+y&1&0\\2x^2+4xy+2y^2-2x-2y&4x+4y&1\end{pmatrix}=A(x+y)$ pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**
c)	$A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)=A(3x)$ $x^2+2=3x\Rightarrow x_1=1$ și $x_2=2$	**2p** **3p**
2.a)	$f(2)=2^3-3\cdot 2^2+a\cdot 2-2=$ $=2a-6=2(a-3)$	**2p** **3p**
b)	$f=(X-2)\left(X^2-X+1\right)+(a-3)X$ $a=3$	**3p** **2p**

c)	$f=(X-2)\left(X^2-X+1\right)$	2p
	$\left(2^x-2\right)\left(2^{2x}-2^x+1\right)=0 \Leftrightarrow x=1$	3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\left(xe^x\right)'\cdot(x+2)-xe^x\cdot(x+2)'}{(x+2)^2}=$	2p
	$=\dfrac{\left(e^x+xe^x\right)\cdot(x+2)-xe^x}{(x+2)^2}=\dfrac{\left(x^2+2x+2\right)e^x}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$	3p
b)	$y-f(0)=f'(0)(x-0)$	2p
	$f(0)=0$, $f'(0)=\dfrac{1}{2}$, deci ecuaţia tangentei este $y=\dfrac{1}{2}x$	3p
c)	Funcţia $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-1$ este continuă pe $[1,2]$	2p
	$g(1)\cdot g(2)=\dfrac{e-3}{3}\cdot\dfrac{e^2-2}{2}<0$, deci există $c\in(1,2)$ astfel încât $g(c)=0$, adică $f(c)=1$	3p
2.a)	$I_1=\int_0^1\dfrac{x}{1+x}dx=\int_0^1\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)dx=$	2p
	$=x\Big\|_0^1-\ln(1+x)\Big\|_0^1=1-\ln 2$	3p
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1 x^n\left(\dfrac{x}{1+x^{n+1}}-\dfrac{1}{1+x^n}\right)dx=\int_0^1\dfrac{x^n(x-1)}{\left(1+x^n\right)\left(1+x^{n+1}\right)}dx$	2p
	Pentru orice $x\in[0,1]$ avem $x-1\le 0$, $x^n\ge 0$, $1+x^n>0$ şi $1+x^{n+1}>0$, deci $I_{n+1}-I_n\le 0$	3p
c)	Pentru orice $x\in[0,1]$ şi orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem $0\le\dfrac{x^n}{1+x^n}\le x^n$	2p
	$0\le\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^n}dx\le\int_0^1 x^n dx\Rightarrow 0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}$, deci $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	3p

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Calculați $(z-1)^2$.
5p	**2.** Arătați că $3(x_1+x_2)-4x_1x_2=3$, știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-5x+3=0$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x-3\cdot 2^x+2=0$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 13.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y=3x+4$ și punctul $A(1,0)$. Determinați ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
5p	**6.** Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AB=12$ și $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a & a+1\\ 2 & a+2 & a+3\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Calculați $\det(A(a))$.
5p	**b)** Determinați numărul natural n, știind că $2A(n^2)-A(n)=A(6)$.
5p	**c)** Arătați că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relația $A(2015)\cdot X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX-3$, unde m este număr real.
5p	**a)** Pentru $m=2$, arătați că $f(1)=0$.
5p	**b)** Determinați numărul real m, știind că polinomul f este divizibil cu $X+1$.
5p	**c)** Arătați că, pentru orice număr real strict pozitiv m, polinomul f are două rădăcini de module egale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{e^x-x}$.
5p	**a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$.
5p	**a)** Calculați $\int_0^2 f^2(x)\,dx$.
5p	**b)** Arătați că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$.
5p	**c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Arătați că $nI_n=\sqrt{5}-4(n-1)I_{n-2}$ pentru orice număr natural n, $n\geq 3$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(z-1)^2 = i^2 =$	**2p**
	$=-1$	**3p**
2.	$x_1 + x_2 = 5$	**2p**
	$x_1 \cdot x_2 = 3 \Rightarrow 3(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 3$	**3p**
3.	$(2^x - 1)(2^x - 2) = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1$ sau $2^x = 2$	**3p**
	$x = 0$ sau $x = 1$	**2p**
4.	Sunt 7 numere de două cifre care sunt divizibile cu 13, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{7}{90}$	**2p**
5.	Panta paralelei duse prin punctul A la dreapta d este $m = 3$	**3p**
	Ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d este $y = 3x - 3$	**2p**
6.	$\sin C = \frac{1}{2}$	**2p**
	$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = 12$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a+1 \\ 2 & a+2 & a+3 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a+1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$	**3p**
b)	$2A(n^2) - A(n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2n^2-n & 2n^2-n+1 \\ 2 & 2n^2-n+2 & 2n^2-n+3 \end{pmatrix}$, $A(6) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	**3p**
	$2n^2 - n - 6 = 0 \Rightarrow n = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$, $n = 2 \in \mathbb{N}$	**2p**

c)	Pentru $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, avem $A(2015)\cdot X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=0\\2015y+2016z=0\\2x+2017y+2018z=0\end{cases}$	**2p**
	Determinantul sistemului omogen este egal cu $0\Rightarrow$ sistemul are o infinitate de soluţii, deci există o infinitate de matrice X	**3p**
2.a)	$f=X^3+2X-3$	**2p**
	$f(1)=1+2-3=0$	**3p**
b)	$f=X^3+mX-3$ este divizibil cu $X+1\Leftrightarrow f(-1)=0$	**2p**
	$m=-4$	**3p**
c)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2m<0\Rightarrow f$ are cel puţin o rădăcină din $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$	**2p**
	$f\in\mathbb{R}[X]\Rightarrow f$ are două rădăcini conjugate din $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, care au modulele egale	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{e^x-x-(x+1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{1-xe^x}{(e^x-x)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$y-f(0)=f'(0)(x-0)$	**2p**
	$f(0)=1$, $f'(0)=1$, deci ecuaţia tangentei este $y=x+1$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+1}{e^{-x}+x}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{1-e^{-x}}=-1$	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^2 f^2(x)dx=\int\limits_0^2\dfrac{1}{x^2+4}dx=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}\Big\|_0^2=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0)=\dfrac{\pi}{8}$	**2p**
b)	F este o primitivă a funcţiei $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$	**2p**
	$F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}>0$ pentru orice număr real x, deci F este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p**
c)	$I_n=\int\limits_0^1\dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+4}}dx=x^{n-1}\sqrt{x^2+4}\Big\|_0^1-(n-1)\int\limits_0^1 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}\,dx=\sqrt{5}-(n-1)\int\limits_0^1\dfrac{x^{n-2}(x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}}dx=$	**3p**
	$=\sqrt{5}-(n-1)I_n-4(n-1)I_{n-2}\Rightarrow nI_n=\sqrt{5}-4(n-1)I_{n-2}$ pentru orice număr natural n, $n\geq 3$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=2$ și $a_2=5$.
5p	**2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(3,5)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a-x$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $8^{4-x}=2^{2x+2}$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 0.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(1,1)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul M și are panta egală cu 2.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=5$, $AC=12$ și $BC=13$. Arătați că $\sin C=\frac{5}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & 2x\\ 0 & 1 & 0\\ -x & 0 & 1+2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.
5p	**b)** Arătați că $A(x)A(y)=A(xy+x+y)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numerele reale x, știind că $A(x)A(x)A(x)=A(7)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2+X+m$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătați că $f(0)=m$.
5p	**b)** Pentru $m=1$, arătați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=5x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
5p	**c)** Determinați numărul natural prim m, știind că polinomul f are o rădăcină întreagă.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Arătați că derivata funcției f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$.
	2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^e \frac{1}{x}dx=1$.
5p	**b)** Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.
5p	**c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că $\int_1^e \frac{1}{x}\left(f(x)\right)^n dx=\frac{1}{2015}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=5-2=3$	**3p**
	$a_3=5+3=8$	**2p**
2.	$f(3)=5 \Leftrightarrow a-3=5$	**3p**
	$a=8$	**2p**
3.	$2^{3(4-x)}=2^{2x+2} \Leftrightarrow 12-3x=2x+2$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 9 numere naturale de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 0, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**2p**
5.	$y-y_M=2(x-x_M)$	**2p**
	$y=2x-1$	**3p**
6.	$13^2=5^2+12^2$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în A	**2p**
	$\sin C=\frac{AB}{BC}=\frac{5}{13}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}0&0&2\\0&1&0\\-1&0&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-(-2)-0-0=2$	**3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}(1-x)(1-y)-2xy&0&(1-x)2y+2x(1+2y)\\0&1&0\\-x(1-y)-(1+2x)y&0&-2xy+(1+2x)(1+2y)\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1-(xy+x+y)&0&2(xy+x+y)\\0&1&0\\-(xy+x+y)&0&1+2(xy+x+y)\end{pmatrix}=A(xy+x+y)$, pentru orice numere reale x şi y	**2p**
c)	$A(x)A(x)A(x)=A\left((x+1)^3-1\right)$, pentru orice număr real x	**3p**
	$(x+1)^3-1=7 \Leftrightarrow x=1$	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3+2\cdot 0^2+0+m=$	**3p**
	$=0+0+0+m=m$	**2p**

b)	$x_1+x_2+x_3=-2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1$, $x_1x_2x_3=-1$	**3p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-\left(x_1+x_2+x_3\right)-3=-2\left((-2)^2-2\cdot 1\right)-(-2)-3=-5=5x_1x_2x_3$	**2p**
c)	$x_1\in\mathbb{Z}$ și $f\left(x_1\right)=0\Leftrightarrow m=-x_1\left(x_1+1\right)^2$	**2p**
	Deoarece m este prim, obținem $\left(x_1+1\right)^2=1\Leftrightarrow x_1=0$, care nu convine, sau $x_1=-2$, pentru care $m=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'=$	**3p**
	$=1-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-\left(x^2+1\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f''(x)=-\dfrac{x'\sqrt{x^2+1}-x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1}=-\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=-\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$f''(x)<0$, pentru orice număr real x, deci funcția f' este descrescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
2.a)	$\int_1^e \frac{1}{x}dx=\ln x\Big\|_1^e=$	**3p**
	$=\ln e-\ln 1=1$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_1^e \left\|f(x)\right\|dx=\int_1^e \ln x\,dx=x\ln x\Big\|_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=$	**3p**
	$=e-x\Big\|_1^e=e-e+1=1$	**2p**
c)	$\int_1^e \frac{1}{x}\left(f(x)\right)^n dx=\int_1^e \frac{1}{x}\ln^n x\,dx=\frac{1}{n+1}\ln^{n+1}x\Big\|_1^e=\frac{1}{n+1}$	**3p**
	$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2015}\Leftrightarrow n=2014$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 1$ și $a_2 = 2015$.

5p **2.** Determinați valoarea maximă a funcției $f:[1,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3\left(x^2-8x\right)=\log_3 9$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{1, 2, 3, 4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,3)$, $B(6,3)$ şi $C(4,0)$. Determinaţi coordonatele punctului D, știind că $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Calculaţi lungimea laturii BC a triunghiului ABC în care $AB=1$, $B=\frac{\pi}{3}$ și $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1&a&a+1\\0&1&a+2\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=1$.

5p **b)** Determinați numerele reale a, știind că $A^2(a)-2A(a)+I_3=O_3$, unde $A^2(a)=A(a)A(a)$.

5p **c)** Arătați că $A(2)+A(4)+A(6)+\ldots+A(100)=50A(51)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+mX+2$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=2$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care $x_1=x_2+x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Pentru $m=8$, arătați că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-6x+9\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $e^x(x-3)^2\leq 4e$, pentru orice $x\in(-\infty, 3]$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1\left(1-x^3\right)^n dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1=\frac{3}{4}$.

5p **b)** Arătați că $I_{n+1}\leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $I_{n+1}=\frac{3(n+1)}{3n+4}I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r = a_2 - a_1 = 2015 - 1 =$	**3p**
	$= 2014$	**2p**
2.	Valoarea maximă a funcției f este $f(4) =$	**3p**
	$= 4 + 1 = 5$	**2p**
3.	$x^2 - 8x = 9 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0$	**3p**
	$x_1 = -1$ și $x_2 = 9$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Prima cifră se poate alege în 4 moduri, a doua cifră se poate alege în câte 3 moduri	**2p**
	Ultima cifră se poate alege, pentru fiecare mod de alegere a primelor două cifre, în câte 2 moduri, deci se pot forma $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ de numere	**3p**
5.	$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow x_D = 1$	**3p**
	$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow y_D = 0$	**2p**
6.	$A = \dfrac{\pi}{2}$	**2p**
	$BC = 2$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	**3p**
b)	$A^2(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2 + 4a + 2 \\ 0 & 1 & 2a + 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $2A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 2a & 2a + 2 \\ 0 & 2 & 2a + 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	**2p**
	$A^2(a) - 2A(a) + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 + 2a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	**1p**
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 + 2a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow a_1 = -2$ și $a_2 = 0$	**2p**
c)	$A(2) + A(100) = 2A(51)$, $A(4) + A(98) = 2A(51)$, ..., $A(50) + A(52) = 2A(51)$	**3p**
	$A(2) + A(4) + A(6) + \ldots + A(100) = 25 \cdot 2A(51) = 50A(51)$	**2p**

2.a)	$f(0)=0^3-4\cdot 0^2+m\cdot 0+2=$ $=2$	**3p** **2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=4$, $x_1=x_2+x_3 \Leftrightarrow x_1=2$ $f(2)=0 \Leftrightarrow 2m-6=0 \Leftrightarrow m=3$	**2p** **3p**
c)	$f=X^3-4X^2+8X+2$, $x_1+x_2+x_3=4$ și $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=8$ Cum $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=16-16=0$, dacă polinomul f ar avea toate rădăcinile reale, am obține $x_1=x_2=x_3=0$, contradicție cu $f(0)=2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x\left(x^2-6x+9\right)+e^x(2x-6)=$ $=e^x\left(x^2-6x+9+2x-6\right)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=1$ și $x_2=3$ $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,1]$ $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[1,3] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,3]$ $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[3,+\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3,+\infty)$	**2p** **1p** **1p** **1p**
c)	$f(x)\leq f(1)$, pentru orice $x\in(-\infty,3]$ Cum $f(1)=4e$, obținem $e^x(x-3)^2\leq 4e$, pentru orice $x\in(-\infty,3]$	**3p** **2p**
2.a)	$I_1=\int_0^1\left(1-x^3\right)dx=\left(x-\frac{x^4}{4}\right)\Big\vert_0^1=$ $=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$	**3p** **2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\left(-x^3\right)\left(1-x^3\right)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n Pentru orice număr natural nenul n și $x\in[0,1]$ avem $-x^3\leq 0$ și $\left(1-x^3\right)^n\geq 0 \Rightarrow I_{n+1}\leq I_n$	**2p** **3p**
c)	$I_{n+1}=\int_0^1 x'\left(1-x^3\right)^{n+1}dx=x\left(1-x^3\right)^{n+1}\Big\vert_0^1-\int_0^1 x(n+1)\left(1-x^3\right)^n\left(-3x^2\right)dx=$ $=3(n+1)\int_0^1 x^3\left(1-x^3\right)^n dx=-3(n+1)\int_0^1\left(1-x^3-1\right)\left(1-x^3\right)^n dx=-3(n+1)\left(I_{n+1}-I_n\right)$, deci $I_{n+1}=\frac{3(n+1)}{3n+4}I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{5}+1\right)^2+\left(\sqrt{5}-1\right)^2=12$.

5p **2.** Calculați produsul $f(1)f(2)f(3)f(4)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2-4x+4\right)=0$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifrele 2, 3 și 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ și $B(2,3)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta AB.

5p **6**. Arătați că $\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $B(x)=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\3x&0&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(B(0)\right)=1$.

5p **b)** Arătați că $B(x)+B(y)=2B\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $B\left(x^2+1\right)B(x)=B\left(x^2+x+1\right)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\dfrac{1}{2}(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Arătați că $(-3)\circ 3=3$.

5p **b)** Determinați numerele naturale n pentru care $n\circ n=11$.

5p **c)** Calculați $1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2015$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-\dfrac{3}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **c)** Determinați coordonatele punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-3x$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x}f(x)\,dx=e(e-1)$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=0$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Arătați că $I_n+(n+1)I_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{5}+1\right)^2=6+2\sqrt{5}$	**2p**
	$\left(\sqrt{5}-1\right)^2=6-2\sqrt{5}\Rightarrow\left(6+2\sqrt{5}\right)+\left(6-2\sqrt{5}\right)=12$	**3p**
2.	$f(3)=0$	**3p**
	$f(1)f(2)f(3)f(4)=0$	**2p**
3.	$x^2-4x+4=1\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$	**2p**
	$x_1=1$ și $x_2=3$, care verifică ecuația dată	**3p**
4.	Cifra unităților este 3	**2p**
	Numerele sunt 243 și 423, deci se pot forma două astfel de numere	**3p**
5.	$m_{AB}=1$ și $m_d\cdot m_{AB}=-1\Rightarrow m_d=-1$	**3p**
	Ecuația dreptei d este $y=-x+3$	**2p**
6.	$\sin(\pi-x)=\sin x$	**2p**
	$\sin(\pi+x)=-\sin x\Rightarrow\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)=\sin x-\sin x=0$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$B(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(B(0))=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$B(x)+B(y)=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\3x&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&y\\0&1&0\\3y&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&x+y\\0&2&0\\3x+3y&0&2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}1&0&\frac{x+y}{2}\\0&1&0\\3\cdot\frac{x+y}{2}&0&1\end{pmatrix}=2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$B\left(x^2+1\right)B(x)=\begin{pmatrix}3x^3+3x+1&0&x^2+x+1\\0&1&0\\3\left(x^2+x+1\right)&0&3x^3+3x+1\end{pmatrix}$, $B\left(x^2+x+1\right)=\begin{pmatrix}1&0&x^2+x+1\\0&1&0\\3\left(x^2+x+1\right)&0&1\end{pmatrix}$	**3p**
	$3x^3+3x+1=1\Leftrightarrow x=0$	**2p**

2.a)	$(-3)\circ 3=\frac{1}{2}(-3-3)(3-3)+3=$	**3p**
	$=0+3=3$	**2p**
b)	$n\circ n=\frac{1}{2}(n-3)^2+3$	**2p**
	$(n-3)^2=16 \Leftrightarrow n_1=-1$, care nu convine, și $n_2=7$, care convine	**3p**
c)	$x\circ 3=3$ și $3\circ y=3$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2015=(1\circ 2)\circ 3\circ(4\circ 5\circ\ldots\circ 2015)=3\circ(4\circ 5\circ\ldots\circ 2015)=3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-(x+2)\cdot 1}{(x-1)^2}=$	**3p**
	$=\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}=-\frac{3}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f''(x)=\frac{6}{(x-1)^3}$, $x\in(1,+\infty)$	**3p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci funcția f este convexă pe intervalul $(1,+\infty)$	**2p**
c)	$f'(x)=-3 \Leftrightarrow (x-1)^2=1$	**3p**
	Cum $x\in(1,+\infty)$, coordonatele punctului sunt $x=2$ și $y=4$	**2p**
2.a)	$\int_1^2 \frac{1}{x}f(x)\,dx=\int_1^2 e^x\,dx=e^x\Big\|_1^2=$	**3p**
	$=e^2-e=e(e-1)$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(x-1)e^x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F(1)=0\Rightarrow c=0$, deci $F(x)=(x-1)e^x$	**2p**
c)	$I_n=\int_0^1 x^{n+1}e^x\,dx=\left(x^{n+1}e^x\right)\Big\|_0^1-(n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx=$	**3p**
	$=e-(n+1)I_{n-1}$, deci $I_n+(n+1)I_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 2+3i$ și $z_2 = 1-3i$. Arătați că numărul $z_1 + z_2$ este real.

5p **2.** Calculați $(f \circ g)(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x - 64 = 0$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y = 4x+1$ și punctul $A(2,0)$. Determinați ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d.

5p **6.** Arătați că $\sin(\pi - x)\sin x - \cos(\pi - x)\cos x = 1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}0 & x & 0\\ x & 0 & x\\ 0 & x & 0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A = 0$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot B(x) + B(x)\cdot A = 3B(x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x)\cdot B(x) = B\left(x^2+x-2\right)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + 2X + m$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0) = m$.

5p **b)** Pentru $m=-1$, demonstrați că $\left(x_1+x_2+x_3\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Arătați că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x-1)(x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuația tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^x$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-2x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \left(f(x)+2x\right)dx = e-1$

5p **b)** Determinaţi primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=e-3$.

5p **c)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, este egal cu $\frac{\pi}{6}\left(3e^2-19\right)$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1+z_2=(2+3i)+(1-3i)=$	**3p**
	$=3$, care este număr real	**2p**
2.	$g(1)=3$	**2p**
	$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(3)=2$	**3p**
3.	$4^x=4^3$	**2p**
	$x=3$	**3p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 13 numere naturale de două cifre care sunt divizibile cu 7, deci sunt 13 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{13}{90}$	**2p**
5.	Dreapta paralelă cu dreapta d are panta egală cu 4	**2p**
	Ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d este $y=4x-8$	**3p**
6.	$\sin(\pi-x)\sin x-\cos(\pi-x)\cos x=-\cos(\pi-x+x)=$	**3p**
	$=-\cos\pi=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-1-0-0=0$	**3p**
b)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}0&2x&0\\x&0&x\\0&2x&0\end{pmatrix}$, $B(x)\cdot A=\begin{pmatrix}0&x&0\\2x&0&2x\\0&x&0\end{pmatrix}$	**2p**
	$A\cdot B(x)+B(x)\cdot A=\begin{pmatrix}0&3x&0\\3x&0&3x\\0&3x&0\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}0&x&0\\x&0&x\\0&x&0\end{pmatrix}=3B(x)$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$B(x)B(x)B(x)=\begin{pmatrix}0&2x^3&0\\2x^3&0&2x^3\\0&2x^3&0\end{pmatrix}$ și $B(x^2+x-2)=\begin{pmatrix}0&x^2+x-2&0\\x^2+x-2&0&x^2+x-2\\0&x^2+x-2&0\end{pmatrix}$	**3p**
	$2x^3=x^2+x-2,\ x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x=-1$	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3-2\cdot0^2+2\cdot0+m=$	**3p**
	$=0-0+0+m=m$	**2p**

b)	$x_1+x_2+x_3=2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2$, $x_1x_2x_3=1$	**3p**
	$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=\frac{(x_1+x_2+x_3)(x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2)}{x_1x_2x_3}=\frac{2\cdot 2}{1}=4$	**2p**
c)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=2^2-2\cdot 2=0$	**2p**
	Dacă polinomul f ar avea toate rădăcinile reale, am obține $x_1=x_2=x_3=0$, contradicție cu $x_1+x_2+x_3=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(2x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^2}=$	**3p**
	$=\frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=1$, $f'(0)=-2$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=-2x+1$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2x}{x^2+x+1}\right)^x=$	**2p**
	$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{x^2+x+1}}=e^{-2}$	**3p**
2.a)	$\int_0^1(f(x)+2x)dx=\int_0^1 e^x dx=$	**2p**
	$=e^x\Big\vert_0^1=e-1$	**3p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x-x^2+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F(1)=e-3\Rightarrow c=-2$, deci $F(x)=e^x-x^2-2$	**3p**
c)	$V=\pi\int_0^1 g^2(x)dx=\pi\int_0^1(e^x-2x)^2dx=\pi\int_0^1(e^{2x}-4xe^x+4x^2)dx=$	**2p**
	$=\pi\left(\frac{1}{2}e^{2x}-4(x-1)e^x+4\frac{x^3}{3}\right)\Big\vert_0^1=\frac{\pi(3e^2-19)}{6}$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=\frac{(2+3i)(3+2i)}{4+9}=\frac{13i}{13}=i$	**3p**
	Partea reală a numărului z este egală cu 0	**2p**
2.	$\Delta=1+4a$	**2p**
	$1+4a=0\Leftrightarrow a=-\frac{1}{4}$	**3p**
3.	$4^x+3\cdot 4^x-16=0\Leftrightarrow 4\cdot 4^x=16$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Sunt $C_3^1\cdot C_4^1=12$ cazuri favorabile	**2p**
	Sunt $C_7^2=21$ de cazuri posibile	**1p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$	**2p**
5.	Mediatoarea d trece prin punctul $P(3,2)$, care este mijlocul segmentului MN	**2p**
	$m_{MN}=-1\Rightarrow m_d=1$	**1p**
	Ecuația dreptei d este $y=x-1$	**2p**
6.	$\sin(\pi-x)=\sin x$, $\cos(2\pi-x)=\cos x$	**2p**
	$(2\sin x)^2+(2\cos x)^2=4\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=4$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)+A(-1)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&0\\0&-2&0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=2A(0)$	**2p**
b)	$A(x)+I_3=\begin{pmatrix}1&0&-1\\x&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(x)+I_3\right)=\begin{vmatrix}1&0&-1\\x&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=1+x$	**3p**
	$1+x=0\Leftrightarrow x=-1$	**2p**
c)	$aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1)=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&-b\\-b&0&0\\0&-b&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&c&0\\0&0&c\\c&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&c&b\\b&a&c\\c&b&a\end{pmatrix}$	**2p**

	$\det\left(aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1)\right)=\begin{vmatrix}a&c&b\\b&a&c\\c&b&a\end{vmatrix}=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=$	**1p**
	$=\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)\geq 0$, pentru orice numere reale pozitive a,b și c	**2p**
2.a)	$x*y=xy-5x-5y+25+5=$	**2p**
	$=x(y-5)-5(y-5)+5=(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere întregi x și y	**3p**
b)	Elementul neutru al legii de compoziție „$*$” este 6	**1p**
	x este simetrizabil dacă există $x'\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x*x'=x'*x=6$, de unde $x'=5+\frac{1}{x-5}$	**2p**
	Cum x' este număr întreg, obținem $x=4$ sau $x=6$	**2p**
c)	$x*5=5$ și $5*y=5$, pentru x și y numere întregi	**2p**
	5 este divizor al lui 2015	**1p**
	2015 are 8 divizori naturali și legea de compoziție este asociativă, avem $d_1*d_2*\cdots*d_8=5$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-\left(\ln(x+1)\right)'=$	**2p**
	$=1-\frac{1}{x+1},\ x\in(-1,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-f(x)-\ln 2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x+1)-\ln 2}{x-1}=$	**2p**
	$=\frac{1}{2}$	**3p**
c)	$f'(0)=0$, $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-1,0)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\geq f(0)\Rightarrow\ln(x+1)\leq x$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\ln 2$	**2p**
b)	$\int_0^1\frac{f(x)+x^2f(x)}{x^4+1}dx=\int_0^1\frac{x}{x^4+1}dx=$	**2p**
	$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(x^2\right)\Big\vert_0^1=\frac{\pi}{8}$	**3p**
c)	Din regula lui l`Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$, limita cerută este egală cu $\lim\limits_{x\to 1}\left(\int_1^x f(t)dt\right)'=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\frac{1}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați partea reală a numărului complex $z=\frac{3+2i}{2-3i}$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x-a$ are graficul tangent axei Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x}+3\cdot 4^x-16=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile cu două elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, aceasta să aibă un singur element număr par.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,3)$ și $N(4,1)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului MN.

5p **6.** Arătați că $\left(\sin x+\sin(\pi-x)\right)^2+\left(\cos x+\cos(2\pi-x)\right)^2=4$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\x&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det\left(A(x)+I_3\right)=0$.

5p **c)** Arătați că $\det\left(aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1)\right)\geq 0$, pentru orice numere reale pozitive a, b și c.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=xy-5x-5y+30$.

5p **a)** Arătați că $x*y=(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere întregi x și y.

5p **b)** Determinați elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziție „$*$”.

5p **c)** Calculați $d_1*d_2*\cdots*d_8$, unde $d_1,d_2,\ldots,d_8$ sunt divizorii naturali ai lui 2015.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln(x+1)$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-f(x)-\ln 2}{x-1}$.

5p **c)** Demonstrați că $\ln(x+1)\leq x$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)+x^2f(x)}{x^4+1}dx=\frac{\pi}{8}$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,dt$.

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul real x, știind că numerele 7, $3x$ și x^2+2 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$ este tangentă axei Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-9}=32^x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând o submulțime a mulțimii $A=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6}\right\}$, aceasta să aibă cel mult două elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(1,0)$ și $C(1,4)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul B și este paralelă cu mediana din A a triunghiului ABC.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $A=\frac{3\pi}{4}$ și $BC=\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(10)\right)=1024$.

5p **b)** Determinați numerele reale x, știind că $A(x)\cdot A(2x)=A\left(x^2+2\right)$.

5p **c)** Știind că $A(n)=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2016)$, demonstrați că n este număr natural divizibil cu 2017.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-5X+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=a$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=2016-4a$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Demonstrați că polinomul f are cel mult o rădăcină în mulțimea numerelor întregi.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x-x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(2\sqrt{3}\right)<f\left(3\sqrt{2}\right)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1 = \frac{2}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $I_{n+1} \leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $(2n+3)I_{n+1} = 2(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$7+x^2+2=2\cdot 3x$	**3p**
	$x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow x=3$	**2p**
2.	$\Delta=0 \Leftrightarrow 4-4m=0$	**3p**
	$m=1$	**2p**
3.	$\left(2^{-1}\right)^{4x-9}=2^{5x} \Leftrightarrow -4x+9=5x$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea A are $C_6^0+C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6=2^6=64$ de submulțimi, deci sunt 64 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea A are $C_6^0+C_6^1+C_6^2=1+6+15=22$ de submulțimi cu cel mult două elemente, deci sunt 22 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{22}{64}=\dfrac{11}{32}$	**1p**
5.	Punctul $M(1,\,2)$ este mijlocul laturii BC	**1p**
	$m_{AM}=\dfrac{2-0}{1-(-1)}=1$	**2p**
	Ecuația dreptei care trece prin punctul B și este paralelă cu dreapta AM este $y=x-1$	**2p**
6.	$\dfrac{BC}{\sin A}=2R \Rightarrow R=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{3\pi}{4}}=$	**3p**
	$=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(10)=\begin{pmatrix}1 & 10 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{10}\end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(10)\right)=\begin{vmatrix}1 & 10 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{10}\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2^{10}=1024$	**3p**
b)	$A(x)\cdot A(2x)=A(3x)$	**2p**
	$A(3x)=A\left(x^2+2\right) \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x_1=1$ și $x_2=2$	**3p**
c)	Deoarece $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y, obținem $A(n)=$ $=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2016)=A(1+2+3+\ldots+2016)=A(2017\cdot 1008)$	**3p**
	$n=2017\cdot 1008$, deci n este număr natural divizibil cu 2017	**2p**

2.a)	$f(0)=0^3-5\cdot 0+a=$ $=0-0+a=a$	**3p** **2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=0$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3=5(x_1+x_2+x_3)-3a=-3a$ $-3a=2016-4a \Leftrightarrow a=2016$	**3p** **2p**
c)	Presupunem că f are cel puțin două rădăcini întregi x_1 și x_2; cum $x_1+x_2+x_3=0 \Rightarrow x_3\in\mathbb{Z}$ Știind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=10$, dacă $x_1^2\geq x_2^2\geq x_3^2$, obținem $x_1^2=9$, $x_2^2=1$ și $x_3^2=0$ Deoarece pentru valorile pe care le obținem pentru x_1, x_2 și x_3, relația $x_1+x_2+x_3=0$ nu este verificată, polinomul f are cel mult o rădăcină întreagă	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'-\left(\frac{1}{2}x^2\right)'-x'-1'=$ $=e^x-\frac{1}{2}\cdot 2x-1=e^x-x-1$, $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	Aplicând succesiv teorema lui l'Hospital, obținem $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-x-1}{e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x-x-1}=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1}=1$	**3p** **2p**
c)	$f''(x)=e^x-1>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci f' strict crescătoare pe $(0,+\infty)$ și cum $f'(0)=0$, obținem $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci f strict crescătoare pe $(0,+\infty)$ $0<2\sqrt{3}<3\sqrt{2}\Rightarrow f\left(2\sqrt{3}\right)<f\left(3\sqrt{2}\right)$	**3p** **2p**
2.a)	$I_1=\int_0^1\left(1-x^2\right)dx=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big\vert_0^1=$ $=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$	**3p** **2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\left(-x^2\right)\left(1-x^2\right)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n Pentru orice număr natural nenul n și $x\in[0,1]$ avem $-x^2\leq 0$ și $\left(1-x^2\right)^n\geq 0$, deci $I_{n+1}\leq I_n$	**2p** **3p**
c)	$I_{n+1}=\int_0^1 x'\left(1-x^2\right)^{n+1}dx=x\left(1-x^2\right)^{n+1}\Big\vert_0^1-\int_0^1 x(n+1)\left(1-x^2\right)^n(-2x)dx=$ $=2(n+1)\int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^n dx=-2(n+1)\int_0^1\left(1-x^2-1\right)\left(1-x^2\right)^n dx=-2(n+1)\left(I_{n+1}-I_n\right)$, deci $(2n+3)I_{n+1}=2(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numerele reale a și b, știind că $(a+b)(i+1)=(a-b+1)(i-1)$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Determinaţi numerele reale m, pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+1$ are valoarea minimă egală cu -3.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3 x=\log_x 3$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă ambele cifre pătrate perfecte.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,a)$, $B(0,-3)$ și $C(1,1)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că $AB+BC=AC$.

5p **6.** Determinaţi $a\in(0,\pi)$, ştiind că $\left(\sin\frac{\pi}{7}-\cos a\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{7}-\sin a\right)^2=2$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}2&1&m\\m&m&1\\1&m&1\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(1))$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m, pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

5p **c)** Rezolvați ecuația matriceală $X\cdot A(0)=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&3&2\end{pmatrix}$, unde $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-4x-4y+20$.

5p **a)** Arătați că $x*y=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Calculați $1*2*3*\ldots*2016$.

5p **c)** Determinaţi numerele naturale a, b și c, știind că $a<b<c$ și $a*b*c=66$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$.

5p **a)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **b)** Determinați coordonatele punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa absciselor.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\right)^n$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_2^4 \frac{1}{\ln x} f(x)dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx = 1-\frac{2}{e}$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^e \frac{f(x)}{x^n}dx = 0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(2a+1)+(2b-1)i=0$	**3p**
	Cum a și b sunt numere reale, obținem $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$	**2p**
2.	$\Delta=m^2-4$	**2p**
	$-\frac{m^2-4}{4}=-3 \Leftrightarrow m^2-16=0 \Leftrightarrow m=-4$ sau $m=4$	**3p**
3.	$\log_3 x=\frac{1}{\log_3 x} \Rightarrow (\log_3 x+1)(\log_3 x-1)=0$	**3p**
	$x=\frac{1}{3}$ sau $x=3$, care verifică ecuaţia	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Pătratele perfecte de o cifră sunt $0, 1, 4$ şi 9, deci sunt $3\cdot 4=12$ numere naturale de două cifre care au ambele cifrele pătrate perfecte, adică sunt 12 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$	**2p**
5.	Punctele A, B şi C sunt coliniare, deci $m_{AB}=m_{BC}$	**2p**
	$\frac{-3-a}{0+1}=\frac{1+3}{1-0} \Leftrightarrow a=-7$	**3p**
6.	$\sin^2\frac{\pi}{7}-2\sin\frac{\pi}{7}\cos a+\cos^2 a+\cos^2\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin a+\sin^2 a=2 \Leftrightarrow 2-2\sin\left(\frac{\pi}{7}+a\right)=2$	**3p**
	Cum $a\in(0,\pi)$, din relația $\sin\left(\frac{\pi}{7}+a\right)=0$, obținem $a=\frac{6\pi}{7}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=0$	**2p**
b)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}2&1&m\\m&m&1\\1&m&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&m+1\\m&m&m+1\\1&m&m+1\end{vmatrix}=(m+1)\begin{vmatrix}2&1&1\\m-2&m-1&0\\-1&m-1&0\end{vmatrix}=(m+1)(m-1)^2$	**2p**
	Matricea $A(m)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(m))\neq 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-1)^2\neq 0 \Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	**3p**

c)	$A(0)=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $\det(A(0))=1\neq 0$, $(A(0))^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&2&-2\\0&1&0\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&2&-2\\0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&9&-7\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$x*y=xy-4x-4y+16+4=$	**2p**
	$=x(y-4)-4(y-4)+4=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x*4=4*y=4$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$1*2*3*\ldots*2016=((1*2*3)*4)*(5*\ldots*2016)=4*(5*\ldots*2016)=4$	**3p**
c)	$(a-4)(b-4)(c-4)=62$, unde a, b și c sunt numere naturale și $a<b<c$	**1p**
	$\begin{cases}a-4=-2\\b-4=-1\\c-4=31\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\\c=35\end{cases}$	**2p**
	$\begin{cases}a-4=1\\b-4=2\\c-4=31\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\b=6\\c=35\end{cases}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x(x+1)}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow-\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}=0$	**3p**
	Coordonatele punctului sunt $x=-\frac{1}{2}$ și $y=-4$	**2p**
c)	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=$	**3p**
	$=\frac{1}{e}$	**2p**
2.a)	$\int_2^4\frac{1}{\ln x}f(x)dx=\int_2^4\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{x}dx=\int_2^4\frac{1}{x}dx=\ln x\Big\|_2^4=$	**3p**
	$=\ln 2$	**2p**
b)	$\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx=\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx=\int_1^e\left(-\frac{1}{x}\right)'\ln x\,dx=-\frac{1}{x}\ln x\Big\|_1^e+\int_1^e\frac{1}{x^2}dx=$	**3p**
	$=-\frac{1}{e}-\frac{1}{x}\Big\|_1^e=1-\frac{2}{e}$	**2p**
c)	Cum $x\in[1,e]$, obținem $0\le\ln x\le 1$, deci $0\le\frac{\ln x}{x^{n+1}}\le\frac{1}{x^{n+1}}$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$0\le\int_1^e\frac{\ln x}{x^{n+1}}dx\le\int_1^e\frac{1}{x^{n+1}}dx=-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{e^n}-1\right)$ și cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{e^n}-1\right)\right)=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^e\frac{f(x)}{x^n}dx=0$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 01

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1 = 1$ şi $a_2 = 4$.

5p **2.** Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(1,a)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^{x-2} = 3^{2-x}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie mai mic sau egal cu 30.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,3)$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi are panta egală cu 1.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB = 10$, $AC = 10$ și $BC = 12$. Arătaţi că $\sin B = \frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} -mx + y + z = -1 \\ x - my + z = -1 \\ x + y - mz = m \end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0)) = 2$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m, $m \neq -1$ și $m \neq 2$.

5p **c)** Pentru $m = 2$, determinați soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 9$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = -2xy + 10x + 10y - 45$.

5p **a)** Arătați că $x * y = -2(x-5)(y-5) + 5$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10 = 5$.

5p **c)** Determinaţi numerele naturale m și n, pentru care $m * n = 27$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 8\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = \frac{2(x-2)(x+2)}{x}$, $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstraţi că ecuaţia $f(x) = 0$ are două soluţii reale distincte.

2. Se consideră funcţia $f:(4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x-4)}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_5^{10} (x-4) f(x)\,dx = \ln 2$.

5p **b)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[5,6]\to\mathbb{R}$, $g(x) = x\,f(x)$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2 \int_n^{n+1} f(x)\,dx\right) = 1$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 01

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=4-1=3$ $a_4=1+3\cdot 3=10$	**2p** **3p**
2.	$f(1)=a\Rightarrow 1^2+4=a$ $a=5$	**3p** **2p**
3.	$3^{2(x-2)}=3^{2-x}\Leftrightarrow 2x-4=2-x$ $x=2$	**3p** **2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile Sunt 21 de numere naturale de două cifre care sunt mai mici sau egale cu 30, deci sunt 21 de cazuri favorabile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{21}{90}=\dfrac{7}{30}$	**1p** **2p** **2p**
5.	$y-3=1\cdot(x-0)$ $y=x+3$	**3p** **2p**
6.	$AD=8$, unde $AD\perp BC$, $D\in BC$ $\sin B=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{4}{5}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$ $=0+1+1-0-0-0=2$	**2p** **3p**
b)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}-m&1&1\\1&-m&1\\1&1&-m\end{vmatrix}=(2-m)(m+1)^2$ Pentru orice număr real m, $m\neq -1$ și $m\neq 2$, obținem $\det(A(m))\neq 0$, deci matricea $A(m)$ este inversabilă	**3p** **2p**
c)	Pentru $m=2$, sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt de forma $(1+\alpha,1+\alpha,\alpha)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$ Cum $x_0+2y_0+3z_0=9\Leftrightarrow 1+\alpha+2(1+\alpha)+3\alpha=9\Leftrightarrow \alpha=1$, soluția sistemului care verifică relația este $(2,2,1)$	**3p** **2p**
2.a)	$x*y=-2xy+10x+10y-50+5=$ $=-2x(y-5)+10(y-5)+5=-2(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**

b)	$x*5=5*y=5$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$((1*2*3*4)*5)*6*7*8*9*10=5*(6*7*8*9*10)=5$	**3p**
c)	$-2(m-5)(n-5)+5=27 \Leftrightarrow (m-5)(n-5)=-11$	**2p**
	Cum m și n sunt numere naturale, obținem $m=4$, $n=16$ sau $m=16$, $n=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x-\frac{8}{x}=$	**2p**
	$=\frac{2x^2-8}{x}=\frac{2(x-2)(x+2)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	Cum $x\in(0,+\infty)$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$	**1p**
	$x\in(0,2] \Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,2]$	**2p**
	$x\in[2,+\infty) \Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x^2-8\ln x\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{8\ln x}{x^2}\right)=+\infty$	**2p**
	Cum $f(2)<0$, ecuația $f(x)=0$ are două soluții reale distincte	**3p**
2.a)	$\int_5^{10}(x-4)f(x)dx=\int_5^{10}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big\vert_5^{10}=$	**3p**
	$=\ln 10-\ln 5=\ln 2$	**2p**
b)	$g(x)=\frac{1}{x-4}$, deci $V=\pi\int_5^6 g^2(x)dx=\pi\int_5^6\frac{1}{(x-4)^2}dx=$	**2p**
	$=\pi\left(-\frac{1}{x-4}\right)\Big\vert_5^6=\frac{\pi}{2}$	**3p**
c)	Pentru $n>4$, $\int_n^{n+1} f(x)dx=\int_n^{n+1}\frac{1}{x(x-4)}dx=\frac{1}{4}\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{4}\ln\frac{n^2-3n}{n^2-3n-4}$	**2p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2\int_n^{n+1} f(x)dx\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\left(1+\frac{4}{n^2-3n-4}\right)^{\frac{n^2-3n-4}{4}}\right)^{\frac{4n^2}{4\left(n^2-3n-4\right)}}=\ln e=1$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\left(\sqrt{2}-3\right)^2+\left(\sqrt{2}+3\right)^2=22$.
5p	**2.** Calculați produsul $f(-1)f(0)f(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+2$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2-6x+6\right)=\log_3 1$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale pare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifrele 5, 7, 8 și 9.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$ și $B(1,2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul O și este paralelă cu dreapta AB.
5p	**6**. Arătați că $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2+x\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=1$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numărul real a, $a\neq -1$, știind că $A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^4+mX^2+2$, unde m este număr real.
5p	**a)** Determinați numărul real m, știind că $f(1)=0$.
5p	**b)** Demonstrați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2\left(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4\right)=0$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2, x_3 și x_4 sunt rădăcinile polinomului f.
5p	**c)** Pentru $m=3$, descompuneți polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, $a\in(-1,1)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x-1)$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=0$.

5p	**b)** Demonstrați că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$ are aria egală cu e.
5p	**c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{-n}^{1}\left(f(x)+e^{x}\right)dx=0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{2}-3\right)^2=11-6\sqrt{2}$	**2p**
	$\left(\sqrt{2}+3\right)^2=11+6\sqrt{2}\Rightarrow\left(\sqrt{2}-3\right)^2+\left(\sqrt{2}+3\right)^2=11-6\sqrt{2}+11+6\sqrt{2}=22$	**3p**
2.	$f(-1)=0$	**3p**
	$f(-1)f(0)f(1)=0$	**2p**
3.	$x^2-6x+6=1\Rightarrow x^2-6x+5=0$	**2p**
	$x=1$ sau $x=5$, care verifică ecuația dată	**3p**
4.	Cifra unităților este 8	**2p**
	Cum cifrele sunt distincte, cifra zecilor poate fi aleasă în 3 moduri și, pentru fiecare alegere a acesteia, cifra sutelor poate fi aleasă în câte 2 moduri, deci se pot forma $3\cdot 2\cdot 1=6$ astfel de numere	**3p**
5.	$m_{AB}=1$ și $m_d=m_{AB}\Rightarrow m_d=1$	**3p**
	Ecuația dreptei d este $y=x$	**2p**
6.	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sin\left(3\pi-\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sin\left(3\pi-\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\right)=\sin\left(\pi-\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$	**3p**
	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=0$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1&x&x^2+x\\0&1&2x\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&y&y^2+y\\0&1&2y\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&y+x&y^2+y+2xy+x^2+x\\0&1&2y+2x\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&x+y&(x+y)^2+(x+y)\\0&1&2(x+y)\\0&0&1\end{pmatrix}=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)=A\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)=$ $=A\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}\right)=A\left(\frac{2016}{2017}\right)$	**3p**
	$A\left(\frac{2016}{2017}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right)\Leftrightarrow a=2016$	**2p**

2.a)	$f(1)=0 \Leftrightarrow 1^4+m\cdot 1^2+2=0$	**2p**
	$m=-3$	**3p**
b)	$x_1+x_2+x_3+x_4=0$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2=0$, pentru orice număr real m	**3p**
c)	$f=X^4+3X^2+2=(X^2+1)(X^2+2)$	**3p**
	Polinoamele X^2+1 și X^2+2 au coeficienți reali, au gradul 2 și nu au rădăcini reale, deci sunt ireductibile în $\mathbb{R}[X]$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}},\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=0,\ f'(0)=1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=x$	**3p**
c)	$f'(x)>0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$ și funcția f este continuă, atunci pentru orice $a\in(-1,1)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică	**3p**
2.a)	$\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=\int_0^2 e^x(x-1)e^{-x}dx=\int_0^2(x-1)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=\dfrac{4}{2}-2=0$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_1^2\lvert f(x)\rvert dx=\int_1^2(x-1)e^x dx=(x-2)e^x\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=0-(-1)e=e$	**2p**
c)	$\int_{-n}^1\left(f(x)+e^x\right)dx=\int_{-n}^1 xe^x dx=(x-1)e^x\Big\vert_{-n}^1=(n+1)e^{-n}$	**3p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-n}^1\left(f(x)+e^x\right)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{e^n}=0$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul real a, știind că numerele 24, 1020 și a sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Determinaţi numărul real m, știind că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x+m$ este tangentă axei Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3}=27$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{25}\right\}$, acesta să fie număr rațional.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(-2,-1)$ și $C(2,3)$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta BC.

5p **6.** Calculaţi lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC, în care $m(\sphericalangle A)=45^\circ$ şi $BC=2\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+ay+a^2z=0\\ x-y+z=2\\ x+y-az=-4\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det\left(A(0)\right)=-1$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a, $a\neq-1$ și $a\neq\frac{1}{3}$.

5p **c)** Determinați numerele reale a, pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), iar $x_0=y_0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-xy+2x+2y-2$.

5p **a)** Arătaţi că $x*y=2-(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x*x=1$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă m, n și p sunt numere întregi astfel încât $m*n*p=2$, atunci produsul numerelor m, n și p este divizibil cu 2.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\ln x+1$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=e^x+\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are soluție unică în intervalul $(0,1)$.

2. Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+3} dx$.

5p **a)** Arătaţi că $I_0 = 1 + 3\ln\frac{3}{4}$.

5p **b)** Demonstraţi că $I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+2}$, pentru orice număr natural n.

5p **c)** Arătaţi că $\lim_{n\to+\infty} nI_n = \frac{1}{4}$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$24+a=2\cdot 1020$	**3p**
	$a=2016$	**2p**
2.	$\Delta=16-4m$	**3p**
	$16-4m=0\Rightarrow m=4$	**2p**
3.	$\left(3^{-1}\right)^{2x-3}=3^3 \Leftrightarrow -2x+3=3$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulțimea A are 25 de elemente, deci sunt 25 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 5 numere raționale în mulțimea A, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{5}{25}=\dfrac{1}{5}$	**2p**
5.	$d\perp BC\Rightarrow m_d\cdot m_{BC}=-1$ și, cum $m_{BC}=1$, obținem $m_d=-1$	**2p**
	Deoarece $A\in d$, ecuația dreptei d este $y-y_A=m_d\left(x-x_A\right)$, adică $y=-x+1$	**3p**
6.	$\dfrac{BC}{\sin A}=2R\Rightarrow R=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=$	**3p**
	$=2$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-0-1-0=-1$	**3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&-1&1\\1&1&-a\end{vmatrix}=(3a-1)(a+1)$	**2p**
	Pentru orice număr real a, $a\neq -1$ și $a\neq\dfrac{1}{3}$, obținem $\det\left(A(a)\right)\neq 0$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă	**3p**
c)	Sistemul are soluție unică, deci $a\neq -1$ și $a\neq\dfrac{1}{3}$; pentru fiecare număr real a, $a\neq -1$ și $a\neq\dfrac{1}{3}$, obținem $x_0=\dfrac{-4a}{(3a-1)(a+1)}$ și $y_0=\dfrac{2(2-3a)}{3a-1}$	**2p**
	Cum $x_0=y_0\Leftrightarrow 3a^2-a-2=0$, obținem $a=-\dfrac{2}{3}$ sau $a=1$	**3p**

2.a)	$x*y=-xy+2x+2y-4+2=$	**2p**
	$=-x(y-2)+2(y-2)+2=2-(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x*x=2-(x-2)^2$	**2p**
	$2-(x-2)^2=1\Leftrightarrow(x-2)^2=1\Leftrightarrow x=1$ sau $x=3$	**3p**
c)	Cum $m*n*p=2+(m-2)(n-2)(p-2)$, obținem $(m-2)(n-2)(p-2)=0$	**2p**
	$m=2$ sau $n=2$ sau $p=2$, deci produsul numerelor m, n și p este divizibil cu 2	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'+(\ln x)'+1'=$	**2p**
	$=e^x+\dfrac{1}{x}+0=e^x+\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$f(1)=e+1$, $f'(1)=e+1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=(e+1)x$	**3p**
c)	$f'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(e^x+\ln x+1\right)=-\infty$, $f(1)>0$ și f este continuă, atunci ecuația $f(x)=0$ are soluție unică în intervalul $(0,1)$	**3p**
2.a)	$I_0=\int_0^1\dfrac{x}{x+3}dx=\int_0^1\left(1-\dfrac{3}{x+3}\right)dx=\left(x-3\ln(x+3)\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1-3\ln4+3\ln3=1+3\ln\dfrac{3}{4}$	**2p**
b)	$I_{n+1}+3I_n=\int_0^1\dfrac{x^{n+2}+3x^{n+1}}{x+3}dx=\int_0^1\dfrac{x^{n+1}(x+3)}{x+3}dx=\int_0^1 x^{n+1}dx=$	**3p**
	$=\dfrac{x^{n+2}}{n+2}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{n+2}$, pentru orice număr natural n	**2p**
c)	$nI_n=n\int_0^1\dfrac{x^{n+1}}{x+3}dx=\int_0^1\left(x^n\right)'\dfrac{x^2}{x+3}dx=x^n\cdot\dfrac{x^2}{x+3}\Big\vert_0^1-\int_0^1 x^n\cdot\dfrac{x^2+6x}{(x+3)^2}dx=\dfrac{1}{4}-\int_0^1 x^n\left(1-\dfrac{9}{(x+3)^2}\right)dx$ pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	Cum $0\le\int_0^1 x^n\left(1-\dfrac{9}{(x+3)^2}\right)dx\le\int_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n, obţinem $\lim\limits_{n\to+\infty}nI_n=\dfrac{1}{4}$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge 1}$, știind că $a_1 = 2016$ și rația $r = 2$.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(1,2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{4x-6} = 4^{3x-4}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{1,2,3,\ldots,40\}$, acesta să conțină cifra 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ și $B(4,5)$. Determinați ecuația dreptei AB.

5p **6.** Dacă $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{4}{5}$, arătați că $\sin 2x = \frac{24}{25}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + y - z = -1 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0)) = -2$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a, $a \ne -1$ și $a \ne 1$.

5p **c)** Determinați numerele întregi a, pentru care sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0), iar x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$.

5p **a)** Arătați că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 3$. Demonstrați că $f(x \circ y) = f(x) f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale a, pentru care $\underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{\text{de 2016 ori } a} = 3^{2015} - 1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln\frac{x+1}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$, $x \in (1,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(1,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f'(2) + f'(3) + f'(4) + \ldots + f'(n)\right) = -\frac{3}{2}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 \sqrt{x}\, f(x)\, dx = \frac{5}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^{e^2}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)\ln x\,dx=4$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,a]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este egal cu $\pi\left(\ln a+\frac{7}{2}\right)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_3 = 2016 + 2 \cdot 2 =$	**3p**
	$= 2020$	**2p**
2.	$f(1) = 2 \Rightarrow 1 + m = 2$	**3p**
	$m = 1$	**2p**
3.	$2^{4x-6} = \left(2^2\right)^{3x-4} \Leftrightarrow 4x - 6 = 6x - 8$	**3p**
	$x = 1$	**2p**
4.	Mulțimea A are 40 de elemente, deci sunt 40 de cazuri posibile	**1p**
	Numerele din mulțimea A care conțin cifra 4 sunt 4, 14, 24, 34 și 40, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{5}{40} = \dfrac{1}{8}$	**2p**
5.	$y - 2 = \dfrac{5-2}{4-1}(x-1)$	**3p**
	$y = x + 1$	**2p**
6.	Cum $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, obţinem $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \dfrac{3}{5}$	**3p**
	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{24}{25}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(0)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= -2 + 0 + 0 - 1 - (-1) - 0 = -2$	**3p**
b)	$\det\left(A(a)\right) = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(a-1)(a+1)$	**3p**
	Pentru orice număr real a, $a \neq -1$ și $a \neq 1$, obţinem $\det\left(A(a)\right) \neq 0$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă	**2p**
c)	Sistemul are soluție unică, deci $a \neq -1$ și $a \neq 1$; pentru fiecare număr a, $a \neq -1$ și $a \neq 1$, soluția sistemului este de forma $\left(-\dfrac{1}{a-1}, \dfrac{1}{a-1}, 0\right)$	**3p**
	Cum a este număr întreg, $\dfrac{1}{a-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a - 1$ este divizor al lui 1, deci $a = 0$ sau $a = 2$	**2p**

2.a)	$x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 3 - 1 =$ $= 3x(y+1) + 3(y+1) - 1 = 3(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**
b)	$f(x \circ y) = 3(x \circ y) + 3 = 3(3(x+1)(y+1) - 1) + 3 = 9(x+1)(y+1) =$ $= (3x+3)(3y+3) = f(x)\, f(y)$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**
c)	$f\left(\underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{\text{de 2016 ori } a}\right) = f\left(3^{2015} - 1\right) \Leftrightarrow \left(f(a)\right)^{2016} = 3 \cdot \left(3^{2015} - 1\right) + 3 \Leftrightarrow \left(f(a)\right)^{2016} = 3^{2016} \Leftrightarrow f(a) = -3$ sau $f(a) = 3$ $a = -2$ sau $a = 0$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Cum $x \in (1, +\infty)$, $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1) \Rightarrow f'(x) = \left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right)' =$ $= \left(\ln(x+1)\right)' - \left(\ln(x-1)\right)' = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$	**2p** **3p**
b)	$f''(x) = \dfrac{4x}{(x-1)^2 (x+1)^2}$ Pentru orice $x \in (1, +\infty)$, $f''(x) > 0$, deci funcția f este convexă pe $(1, +\infty)$	**2p** **3p**
c)	$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(f'(2) + f'(3) + \ldots + f'(n)\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{1}\right) + \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n-1}\right)\right) =$ $= \lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right) = -\dfrac{3}{2}$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_1^2 \sqrt{x} f(x)\, dx = \int_1^2 (x+1)\, dx = \left(\dfrac{x^2}{2} + x\right)\Big\vert_1^2 =$ $= 4 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$	**3p** **2p**
b)	$\int_1^{e^2} \left(f(x) - \sqrt{x}\right) \ln x\, dx = \int_1^{e^2} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \ln x\, dx = 2\sqrt{x} \cdot \ln x \Big\vert_1^{e^2} - 2\int_1^{e^2} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, dx =$ $= \left(2\sqrt{x} \cdot \ln x - 4\sqrt{x}\right)\Big\vert_1^{e^2} = 4e - 4e + 4 = 4$	**3p** **2p**
c)	$V = \pi \int_1^a g^2(x)\, dx = \pi \int_1^a \left(x + 2 + \dfrac{1}{x}\right) dx = \pi \left(\dfrac{x^2}{2} + 2x + \ln x\right)\Big\vert_1^a = \pi \left(\dfrac{a^2}{2} + 2a + \ln a - \dfrac{5}{2}\right)$ $\pi \left(\dfrac{a^2}{2} + 2a + \ln a - \dfrac{5}{2}\right) = \pi \left(\ln a + \dfrac{7}{2}\right) \Leftrightarrow a^2 + 4a - 12 = 0$ și, cum $a > 1$, obținem $a = 2$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 2+3i$ și $z_2 = 4-6i$. Arătați că numărul $z_1z_2 + 2z_1 + z_2$ este real.

5p **2.** Calculați $(f \circ g)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+x+1$.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5\left(x^2-4\right)=\log_5(5x-8)$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y=3x-2017$ și punctul $A(1,0)$. Determinați ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d.

5p **6.** Arătați că $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin x+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos x=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(2))$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(x)+B(x))=\det(B(x))$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinaţi numerele naturale n și p, știind că $A(n)B(p)=B(3)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+8X+3$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinaţi numărul real a, știind că $f(1)=0$.

5p **b)** Pentru $a=6$, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+5X+3.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a\in(-4,4)$, atunci polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2018}+2018x+2$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2018\left(x^{2017}+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,2020)$ aparține tangentei la graficul funcţiei f care trece prin punctul de abscisă $x=0$ situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are exact două soluții reale distincte.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+2}dx$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)dx$.

5p **b)** Demonstrați că $I_{n+1}+2I_n+2I_{n-1}=\frac{1}{n}$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty} nI_n=\frac{1}{5}$.

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1z_2+2z_1+z_2=(2+3i)(4-6i)+2(2+3i)+4-6i=$	**2p**
	$=8-12i+12i-18i^2+4+6i+4-6i=34$, care este număr real	**3p**
2.	$g(0)=1$	**2p**
	$(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(1)=1$	**3p**
3.	$x^2-4=5x-8\Rightarrow x^2-5x+4=0$	**3p**
	$x=1$, care nu verifică ecuația; $x=4$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 13 numere naturale de două cifre, multipli de 7, deci sunt 13 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{13}{90}$	**2p**
5.	Dreapta paralelă cu dreapta d are panta egală cu 3	**2p**
	Ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d este $y=3x-3$	**3p**
6.	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\sin x+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\cos x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x-x\right)=$	**3p**
	$=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(2))=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4$	**3p**
b)	$A(x)+B(x)=\begin{pmatrix}x&0&x\\0&2x&0\\2&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(x)+B(x))=\begin{vmatrix}x&0&x\\0&2x&0\\2&0&1\end{vmatrix}=2x^2-4x^2=$	**3p**
	$=-2x^2=\det(B(x))$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A(n)B(p)=\begin{pmatrix}n&0&0\\0&n&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&p\\0&p&0\\2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&np\\0&np&0\\2&0&0\end{pmatrix}$, $B(3)=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&3&0\\2&0&0\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(n)B(p)=B(3)\Leftrightarrow np=3$ și, cum n și p sunt numere naturale, obținem $n=1$, $p=3$ sau $n=3$, $p=1$	**3p**
2.a)	$f(1)=0\Leftrightarrow 1^3+a\cdot 1^2+8\cdot 1+3=0$	**2p**
	$a=-12$	**3p**

b)	$a=6 \Rightarrow f=X^3+6X^2+8X+3$ și câtul este $X+1$ Restul este 0	**3p** **2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=-a$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=8 \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2-16$ Pentru $a\in(-4,4)$, obținem $a^2-16<0$, deci $x_1^2+x_2^2+x_3^2<0$, adică polinomul f nu are toate rădăcinile reale	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^{2018}\right)'+(2018x)'+2'=$ $=2018x^{2017}+2018=2018\left(x^{2017}+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=2018x+2$ $2020=2018a+2 \Leftrightarrow a=1$	**3p** **2p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $f(-1)=-2015$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, ecuația $f(x)=0$ are exact două soluții reale distincte	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}+2x\right)\right\|_0^1=$ $=\frac{1}{3}+1+2=\frac{10}{3}$	**3p** **2p**
b)	$I_{n+1}+2I_n+2I_{n-1}=\int_0^1\frac{x^{n+1}+2x^n+2x^{n-1}}{x^2+2x+2}dx=$ $=\int_0^1\frac{x^{n-1}\left(x^2+2x+2\right)}{x^2+2x+2}dx=\int_0^1 x^{n-1}dx=\left.\frac{x^n}{n}\right\|_0^1=\frac{1}{n}$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$	**2p** **3p**
c)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{x^2+2x+2}dx\le 0$, deci $I_{n+1}\le I_n$, pentru orice număr natural nenul n $5I_{n+1}\le I_{n+1}+2I_n+2I_{n-1}\le 5I_{n-1} \Rightarrow 5I_{n+1}\le\frac{1}{n}\le 5I_{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$ Pentru orice număr natural n, $n\ge 2$, $\frac{n}{5(n+1)}\le nI_n\le\frac{n}{5(n-1)}$, deci $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n=\frac{1}{5}$	**1p** **2p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\frac{2+i}{2-i}+\frac{2-i}{2+i}=\frac{6}{5}$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-(2m+3)x+m^2+3m+2=0$. Arătați că $(x_1-x_2)^2=1$, pentru orice număr real m.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-3}=5-x$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma doar cu cifre pare.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N și P, mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AC. Demonstrați că $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BP}$.

5p **6.** Determinați numerele reale x, știind că $\sin 2x=\cos x$ și $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&3\\1&3&a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=1\\x+ay+3z=2\\x+3y+az=2\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=(a+1)(a-3)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numerele reale m pentru care $A(m)A(2-m)=A(2-m)A(m)$.

5p **c)** Determinați numerele întregi a pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), iar x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-5xy+10x+10y-18$.

5p **a)** Arătați că $x*y=2-5(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele naturale n, știind că $(n*n)*n=n$.

5p **c)** Arătați că, dacă $a*a=b$ și $b*b=a$, atunci $a=b=2$ sau $a=b=\frac{9}{5}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

5p **a)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{2x}=\frac{1}{e^2}$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice număr real a, $a\in\left(-\sqrt{2},-1\right)$, ecuația $f(x)=a$ are exact două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ şi, pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

5p **b)** Demonstrați că $I_n\le\dfrac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $(2n+1)I_n=2\sqrt{2}-2nI_{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{2+i}{2-i}+\frac{2-i}{2+i}=\frac{(2+i)^2+(2-i)^2}{(2-i)(2+i)}=$	**2p**
	$=\frac{4+4i+i^2+4-4i+i^2}{2^2-i^2}=\frac{6}{5}$	**3p**
2.	$x_1+x_2=2m+3$, $x_1x_2=m^2+3m+2$	**2p**
	$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4m^2+12m+9-4m^2-12m-8=1$, pentru orice număr real m	**3p**
3.	$\sqrt{x-3}=5-x\Rightarrow x-3=(5-x)^2$, deci $x^2-11x+28=0$	**3p**
	$x=7$, care nu verifică ecuația, sau $x=4$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 4 moduri, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri	**2p**
	Cifra unităților se poate alege, pentru fiecare mod de alegere a primelor două cifre, în câte 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot 4\cdot 3=48$ de numere	**3p**
5.	$MP \parallel BC$, $NP \parallel AB$	**2p**
	$BNPM$ paralelogram, deci $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BP}$	**3p**
6.	$2\sin x\cos x=\cos x\Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)=0\Leftrightarrow \cos x=0$ sau $\sin x=\frac{1}{2}$	**3p**
	Cum $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, obținem $x=\frac{\pi}{2}$ sau $x=\frac{5\pi}{6}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&3\\1&3&a\end{vmatrix}=a^2+3+3-a-9-a=$	**3p**
	$=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$A(m)A(2-m)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&m&3\\1&3&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2-m&3\\1&3&2-m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6-m&6-m\\m+4&-m^2+2m+10&7\\m+4&7&-m^2+2m+10\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(2-m)A(m)=\begin{pmatrix}3&m+4&m+4\\6-m&-m^2+2m+10&7\\6-m&7&-m^2+2m+10\end{pmatrix}$, de unde obținem $m=1$	**3p**

c)	Sistemul are soluție unică, deci $a \neq -1$ și $a \neq 3$; pentru fiecare număr întreg a, $a \neq -1$ și $a \neq 3$, soluția sistemului este de forma $\left(\frac{a-1}{a+1}, \frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1}\right)$	**3p**
	Cum $a \in \mathbb{Z}$, obținem $\frac{a-1}{a+1}, \frac{1}{a+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a+1$ este divizor al lui 1, deci $a=-2$ sau $a=0$	**2p**
2.a)	$x * y = -5xy + 10x + 10y - 20 + 2 =$	**2p**
	$= -5x(y-2) + 10(y-2) + 2 = 2 - 5(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$n * n = 2 - 5(n-2)^2$, $(n*n)*n = 2 + 25(n-2)^3$	**3p**
	$2 + 25(n-2)^3 = n \Leftrightarrow (n-2)\left(25(n-2)^2 - 1\right) = 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 2$	**2p**
c)	$a * a = b \Leftrightarrow b - 2 = -5(a-2)^2$	**1p**
	$b * b = a \Leftrightarrow a - 2 = -5(b-2)^2$, deci $a - 2 = -125(a-2)^4$	**2p**
	$a - 2 = 0$, de unde $a = b = 2$ sau $a - 2 = -\frac{1}{5}$, de unde $a = b = \frac{9}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{x+2}{\left(x^2+2x+2\right)\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x \in \mathbb{R}$	**3p**
	$x \in (-\infty, -2] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty, -2]$	**1p**
	$x \in [-2, +\infty) \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-2, +\infty)$	**1p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$	**1p**
	$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x)\right)^{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+2x+2}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{-2x-2}{x^2+2x+2}\right)^{\frac{x^2+2x+2}{-2x-2}}\right)^{\frac{-2x-2}{x^2+2x+2} \cdot x} =$	**2p**
	$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x^2-2x}{x^2+2x+2}} = \frac{1}{e^2}$	**2p**
c)	$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - a$ este continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $g'(x) = f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci g este strict descrescătoare pe $(-\infty, -2)$ și strict crescătoare pe $(-2, +\infty)$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1 - a > 0$, $g(-2) = -\sqrt{2} - a < 0$ și $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1 - a > 0$, pentru orice $a \in \left(-\sqrt{2}, -1\right)$, ecuația $f(x) = a$ are exact două soluții reale distincte	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\sqrt{x+1}\Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= 2\sqrt{2} - 2 = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$	**2p**
b)	$x \in [0,1] \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1$ și $x^n \geq 0$, deci $\frac{x^n}{\sqrt{x+1}} \leq x^n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x+1}}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\vert_0^1 = \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

c)	$I_n = 2\int_0^1 x^n \left(\sqrt{x+1}\right)' dx = 2x^n \left(\sqrt{x+1}\right)\Big\|_0^1 - 2n\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{x+1}\,dx = 2\sqrt{2} - 2n\int_0^1 x^{n-1}\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}\,dx =$	**3p**
	$= 2\sqrt{2} - 2n\int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1}}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\sqrt{2} - 2nI_n - 2nI_{n-1} \Rightarrow (2n+1)I_n = 2\sqrt{2} - 2nI_{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n \ge 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați suma numerelor întregi din intervalul $(-5, 5)$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$. Calculați $(f\circ f)(1)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+3}=x-3$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1, 2, 3,\dots, 100\}$, acesta să fie multiplu de 11.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,2)$ și $N(4,2)$. Determinați coordonatele punctului P, situat pe axa Ox, astfel încât $PM=PN$.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC, în care $AB=6\sqrt{2}$ şi $C=\frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2^x & 4^x\\ 1 & x & 2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(x))=(2^x-1)(2^x+x-x\cdot 2^x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Arătați că $A(1)+A(2)+A(3)+\dots+A(2017)=\begin{pmatrix}2017 & 2017 & 2017\\ 2017 & 2(2^{2017}-1) & \frac{4}{3}(4^{2017}-1)\\ 2017 & 2017\cdot 1009 & 2017\cdot 2018\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=7xy+7x+7y+6$.

5p **a)** Arătați că $x*y=7(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă a, b și c sunt numere naturale astfel încât $a*b*c=48$, atunci numerele a, b și c sunt egale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-3}{e^x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{-x^2+2x+3}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că $-2e\le f(x)\le\frac{6}{e^3}$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 \dfrac{x+1}{\sqrt{x}} f(x)\,dx=\ln\dfrac{3}{2}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m>0$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x}(x+1)f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$ are aria egală cu $1-\ln\dfrac{m+1}{m}$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4=$	**3p**
	$=0$	**2p**
2.	$f(1)=0$	**2p**
	$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(0)=-1$	**3p**
3.	$x+3=x^2-6x+9\Rightarrow x^2-7x+6=0$	**3p**
	$x=1$ care nu convine, $x=6$ care convine	**2p**
4.	În mulțimea A sunt 100 de numere, deci sunt 100 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea A sunt 9 numere care sunt multipli de 11, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{100}$	**1p**
5.	$P\in Ox\Rightarrow y_P=0$	**2p**
	$PM=PN\Leftrightarrow(2-x_P)^2+(2-0)^2=(4-x_P)^2+(2-0)^2\Leftrightarrow x_P=3$	**3p**
6.	$\dfrac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow R=\dfrac{6\sqrt2}{2\cdot\dfrac{\sqrt2}{2}}=$	**3p**
	$=6$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&1&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4+1+4-2-4-2=1$	**3p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2^x&4^x\\1&x&2x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2^x-1&4^x-1\\0&x-1&2x-1\end{vmatrix}=(2^x-1)\begin{vmatrix}1&2^x+1\\x-1&2x-1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=(2^x-1)(2x-1-x\cdot2^x+2^x-x+1)=(2^x-1)(2^x+x-x\cdot2^x)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A(1)+A(2)+A(3)+\ldots+A(2017)=\begin{pmatrix}2017&2017&2017\\2017&2^1+2^2+\ldots+2^{2017}&4^1+4^2+\ldots+4^{2017}\\2017&2017\cdot1009&2017\cdot2018\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}2017&2017&2017\\2017&\dfrac{2(2^{2017}-1)}{2-1}&\dfrac{4(4^{2017}-1)}{4-1}\\2017&2017\cdot1009&2017\cdot2018\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2017&2017&2017\\2017&2(2^{2017}-1)&\dfrac43(4^{2017}-1)\\2017&2017\cdot1009&2017\cdot2018\end{pmatrix}$	**2p**

2.a)	$x * y = 7xy + 7x + 7y + 7 - 1 =$	**2p**
	$= 7x(y+1) + 7(y+1) - 1 = 7(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x * x * x = 7^2(x+1)^3 - 1$, deci $7^2(x+1)^3 - 1 = x$	**2p**
	$(x+1)\left(7^2(x+1)^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{7}$ sau $x = -1$ sau $x = -\frac{6}{7}$	**3p**
c)	$49(a+1)(b+1)(c+1) - 1 = 48 \Leftrightarrow (a+1)(b+1)(c+1) = 1$	**2p**
	Cum a, b și c sunt numere naturale, obținem $a+1 = b+1 = c+1 = 1$, deci $a = b = c$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{(x^2-3)' \cdot e^x - (x^2-3) \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{2xe^x - (x^2-3)e^x}{(e^x)^2} =$	**3p**
	$= \frac{e^x(2x - x^2 + 3)}{(e^x)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 3}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(-1) = -2e$, $f'(-1) = 0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$, adică $y = -2e$	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 3$	**1p**
	$x \in [-1,3] \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-1,3]$ și $x \in [3,+\infty) \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[3,+\infty)$	**2p**
	Cum $f(-1) = -2e$, $f(3) = \frac{6}{e^3}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, obținem $-2e \leq f(x) \leq \frac{6}{e^3}$, pentru orice $x \in [-1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}} f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx =$	**2p**
	$= \ln(x+1)\Big\vert_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$	**3p**
b)	F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$, $x \in (0,+\infty)$	**2p**
	$F'(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} > 0$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$, deci F este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$	**3p**
c)	$g(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \mathcal{A} = \int_1^2 \lvert g(x) \rvert\,dx = \int_1^2 \frac{x}{x+1}\,dx = x\Big\vert_1^2 - \ln(x+1)\Big\vert_1^2 = 1 - \ln\frac{3}{2}$	**3p**
	$1 - \ln\frac{m+1}{m} = 1 - \ln\frac{3}{2} \Rightarrow m = 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z = 2 + i$. Arătați că $z + \overline{z} + z\overline{z} = 9$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(1, m)$ aparține graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(1 - \log_2 x)(2 - \log_2 x) = 0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor strict mai mică decât cifra unităților.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(3,3)$ și $C(0,2)$. Determinați lungimea medianei din C a triunghiului ABC.

5p **6.** Arătați că $\left(1 + \mathrm{tg}^2 x\right)\cos^2 x - \left(1 + \mathrm{ctg}^2 x\right)\sin^2 x = 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + az = 0 \\ -2x - y + 3z = 0 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(9)) = 0$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Demonstrați că, dacă sistemul are soluția (x_0, y_0, z_0), cu x_0, y_0 și z_0 numere reale nenule, atunci $-x_0 + y_0 + z_0 = 11(x_0 + y_0 + z_0)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 7x + 7y + 42$.

5p **a)** Arătați că $x \circ y = (x + 7)(y + 7) - 7$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, știind că $x \circ x = x$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $2017^a \circ (-6) = 1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{1 - x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{1 - x + x\ln x}{x(1 - x)^2}$, $x \in (1, +\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $x \ln x > x - 1$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 3x^2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \left(f(x) - 3x^2\right) dx = e - 1$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 x\, f(x)\, dx = \frac{7}{4}$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = n$ are aria egală cu $n^2 - n + 1$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z+\overline{z}+z\overline{z}=2+i+2-i+(2+i)(2-i)=$	**3p**
	$=4+4-i^2=9$	**2p**
2.	$f(1)=m\Rightarrow 1+2-3=m$	**3p**
	$m=0$	**2p**
3.	$1-\log_2 x=0$ sau $2-\log_2 x=0$	**3p**
	$x=2$ sau $x=4$, care convin	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de două cifre, care au cifra zecilor strict mai mică decât cifra unităților are 36 de elemente, deci sunt 36 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{36}{90}=\dfrac{2}{5}$	**1p**
5.	$M(3,2)$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$CM=3$	**2p**
6.	$\left(1+\mathrm{tg}^2x\right)\cos^2 x-\left(1+\mathrm{ctg}^2x\right)\sin^2 x=\left(1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\cos^2 x-\left(1+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)\sin^2 x=$	**3p**
	$=\cos^2 x+\sin^2 x-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=0$, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(9)=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&9\\-2&-1&3\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(9))=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&9\\-2&-1&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=6+(-2)+(-18)-(-8)-(-9)-3=0$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&a\\-2&-1&3\end{vmatrix}=9-a$	**3p**
	Sistemul are soluție unică $\Leftrightarrow \det(A(a))\neq 0$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{9\}$	**2p**
c)	Sistemul are soluția (x_0,y_0,z_0), cu x_0, y_0 și z_0 numere reale nenule, deci $a=9$ și soluția sistemului este de forma $(5\alpha,-7\alpha,\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$	**3p**
	$-x_0+y_0+z_0=-5\alpha+(-7\alpha)+\alpha=-11\alpha=11(5\alpha+(-7\alpha)+\alpha)=11(x_0+y_0+z_0)$	**2p**
2.a)	$x\circ y=xy+7x+7y+49-7=$	**2p**
	$=x(y+7)+7(y+7)-7=(x+7)(y+7)-7$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

b)	$x \circ x = (x+7)^2 - 7$, deci $(x+7)^2 - 7 = x$ $(x+7)(x+6) = 0 \Leftrightarrow x = -7$ sau $x = -6$	**2p** **3p**
c)	$\left(2017^a + 7\right)(-6+7) - 7 = 1 \Leftrightarrow 2017^a + 7 - 7 = 1$ $2017^a = 1 \Leftrightarrow a = 0$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot(1-x) - \ln x \cdot (-1)}{(1-x)^2} =$ $= \dfrac{\frac{1-x}{x} + \ln x}{(1-x)^2} = \dfrac{1 - x + x\ln x}{x(1-x)^2}$, $x \in (1, +\infty)$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{1-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{-1} = 0$ Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p** **2p**
c)	$g : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x\ln x - x + 1 \Rightarrow g'(x) = \ln x$, deci $g'(x) > 0$ pentru orice $x \in (1, +\infty)$ Funcția g este strict crescătoare pe $(1, +\infty)$ și, cum $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 0$, obținem $g(x) > 0$, deci $x\ln x > x - 1$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int\limits_0^1 \left(f(x) - 3x^2\right)dx = \int\limits_0^1 \left(e^x + 3x^2 - 3x^2\right)dx = \int\limits_0^1 e^x dx =$ $= e^x \Big\|_0^1 = e - 1$	**2p** **3p**
b)	$\int\limits_0^1 x f(x)dx = \int\limits_0^1 \left(xe^x + 3x^3\right)dx = (x-1)e^x \Big\|_0^1 + \dfrac{3x^4}{4}\Big\|_0^1 =$ $= 1 \cdot e^0 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{7}{4}$	**3p** **2p**
c)	$g(x) = 3x^2 \Rightarrow \mathcal{A} = \int\limits_0^n \left\|g(x)\right\| dx = \int\limits_0^n 3x^2\, dx = x^3 \Big\|_0^n = n^3$ $n^3 = n^2 - n + 1 \Leftrightarrow (n-1)\left(n^2+1\right) = 0 \Leftrightarrow n = 1$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 5+2i$ și $z_2 = 3-3i$. Arătați că $3z_1 + 2z_2 = 21$.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-x+2$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2+3}=3\cdot 3^{3x}$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 3 și cu 5.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(2,4)$ și $C(m,0)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că punctele A, B și C sunt coliniare.
5p	**6.** Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că $AB=4$, $AC=8$ și $A=\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 2-x & 0 & x-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(1-x) & 0 & 2x-1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\big(A(2)\big)=2$.
5p	**b)** Demonstrați că $\det\big(A(x)A(-x)\big)\le 0$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Arătați că, dacă numerele naturale m și n verifică relația $A(m)A(n)=A(2)$, atunci $m+n=3$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2+aX+1$, unde a este număr real.
5p	**a)** Determinați numărul real a, știind că $f(1)=0$.
5p	**b)** Pentru $a=2$, calculați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+X+1.
5p	**c)** Determinați numerele reale a pentru care rădăcinile polinomului f au modulele egale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-1-\ln(x+2)$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+2}$, $x\in(-2,+\infty)$.
5p	**b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(-2,+\infty)$.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.
	2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_1^e x\ln^n x\,dx$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^e x\,dx=\frac{e^2-1}{2}$.
5p	**b)** Demonstrați că $I_{n+1}\le I_n$, pentru orice număr natural nenul n.
5p	**c)** Demonstrați că $2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3z_1+2z_2=3(5+2i)+2(3-3i)=15+6i+6-6i=$	**3p**
	$=15+6=21$	**2p**
2.	$x+1=x^2-x+2 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0$	**2p**
	$x=1$	**3p**
3.	$3^{x^2+3}=3^{1+3x} \Leftrightarrow x^2+3=1+3x \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$	**3p**
	$x=1$ sau $x=2$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de două cifre, care sunt divizibile cu 3 și cu 5, are 6 elemente, deci sunt 6 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{6}{90}=\dfrac{1}{15}$	**1p**
5.	Ecuația dreptei AB este $y=x+2$	**2p**
	Punctul C aparține dreptei $AB \Leftrightarrow m=-2$	**3p**
6.	$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A=16+64-2\cdot4\cdot8\cdot\dfrac{1}{2}=48$	**3p**
	$BC=4\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(2))=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&3\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=0+0+0-(-2)-0-0=2$	**2p**
b)	$A(x)A(-x)=\begin{pmatrix}2+x^2&0&-x^2-1\\0&1&0\\2+2x^2&0&-2x^2-1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(x)A(-x))=\begin{vmatrix}2+x^2&0&-x^2-1\\0&1&0\\2+2x^2&0&-2x^2-1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=(x^2+2)(-2x^2-1)-(-x^2-1)(2x^2+2)=-x^2\le0$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A(m)A(n)=\begin{pmatrix}2-mn&0&mn-1\\0&1&0\\2(1-mn)&0&2mn-1\end{pmatrix}=A(mn)$	**3p**
	$A(mn)=A(2)$, deci $mn=2$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem $m+n=3$	**2p**
2.a)	$f(1)=0\Leftrightarrow1^3+2\cdot1^2+a\cdot1+1=0$	**2p**
	$a=-4$	**3p**

b)	$f = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ și câtul este $X+1$ Restul este 0	**3p** **2p**
c)	$x_1 x_2 x_3 = -1$ și $\lvert x_1\rvert = \lvert x_2\rvert = \lvert x_3\rvert \Rightarrow \lvert x_1\rvert = \lvert x_2\rvert = \lvert x_3\rvert = 1$ Cum f are cel puțin o rădăcină reală, una dintre rădăcini este egală cu -1 sau cu 1 Dacă $x_1 = -1$, obținem $f(-1) = 0$, deci $a = 2$, ceea ce convine, deoarece $\lvert x_2\rvert = \lvert x_3\rvert = 1$ Dacă $x_1 = 1$, obținem $f(1) = 0$, deci $a = -4$, ceea ce nu convine, deoarece $\lvert x_2\rvert \neq \lvert x_3\rvert$	**2p** **1p** **1p** **1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \left(e^x\right)' - 1' - \left(\ln(x+2)\right)' =$ $= e^x - 0 - \frac{(x+2)'}{x+2} = e^x - \frac{1}{x+2}$, $x \in (-2,+\infty)$	**2p** **3p**
b)	$f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+2)^2}$, $x \in (-2,+\infty)$ $f''(x) \geq 0$, deci funcția f este convexă pe $(-2,+\infty)$	**2p** **3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+2} = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x-1}{x} - \frac{\ln(x+2)}{x}\right) = +\infty$	**2p** **2p** **1p**
2.a)	$\int_1^e x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right\vert_1^e =$ $= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}$	**3p** **2p**
b)	$x \in [1,e] \Rightarrow 0 \leq \ln x \leq 1 \Rightarrow \ln x - 1 \leq 0$ $I_{n+1} - I_n = \int_1^e x \ln^n x(\ln x - 1)\,dx \leq 0$, deci $I_{n+1} \leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p** **3p**
c)	$I_{n+1} = \int_1^e x \ln^{n+1} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\ln^{n+1} x\right\vert_1^e - \frac{n+1}{2}\int_1^e x \ln^n x\,dx =$ $= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$, deci $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$, pentru orice număr natural nenul n	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 2+3i$ și $z_2 = 1+2i$. Arătați că $2z_1 - 3z_2 = 1$.
5p	**2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 3mx + 2 = 0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $x_1 + x_2 + x_1x_2 + 1 = 0$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x+3) + \log_4(x-3) = 2$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 6.
5p	**5.** Determinați numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	**6**. Arătați că $(\sin x - \cos x)^2 + \sin 2x = 1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0)) = -1$.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x)) \cdot \det(A(x+1)) = 12$.
5p	**c)** Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2) \cdot X = A(0)$.
	2. Se consideră polinomul $f = X^3 - (m+2)X^2 + (m^2+2)X - 1$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătați că $f(0) = -1$, pentru orice număr real m.
5p	**b)** Demonstrați că $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = -4(m-1)^2$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
5p	**c)** Determinați numărul real m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x) = 2(e^x - x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f, în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)^n$, unde n este număr natural nenul.
5p	**a)** Arătați că $\int_{-2}^{1} (x+2)^2 dx = 9$.
5p	**b)** Pentru $n = 1$, arătați că $\int_0^1 f(x)e^x dx = 2e - 1$.
5p	**c)** Determinaţi numărul natural nenul n pentru care suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = -1$ și $x = 1$ are aria egală cu $\dfrac{242}{n+1}$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE
Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$2z_1-3z_2=2(2+3i)-3(1+2i)=$	**2p**
	$=4+6i-3-6i=1$	**3p**
2.	$x_1+x_2=3m$, $x_1x_2=2\Rightarrow x_1+x_2+x_1x_2+1=3m+3$	**3p**
	$3m+3=0\Leftrightarrow m=-1$	**2p**
3.	$\log_4\left((x+3)(x-3)\right)=2\Rightarrow x^2-9=4^2\Rightarrow x^2-25=0$	**3p**
	$x=-5$, care nu convine, $x=5$, care convine	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 6 sunt 16, 23, 32 și 61, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{90}=\dfrac{2}{45}$	**1p**
5.	$\dfrac{a}{3}=\dfrac{2}{-3}$	**3p**
	$a=-2$	**2p**
6.	$(\sin x-\cos x)^2+\sin 2x=\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=$	**3p**
	$=\sin^2 x+\cos^2 x=1$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+1-1-0-1=-1$	**3p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}x&1&1\\x+1&1&1\\1&x&1\end{vmatrix}=x-1$, $\det(A(x+1))=x\Rightarrow(x-1)x=12$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=4$	**2p**
c)	$A(2)=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$, $\det(A(2))=1\neq 0$, $(A(2))^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&1&1\\5&-3&-1\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=(A(2))^{-1}\cdot A(0)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&2&1\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3-(m+2)\cdot 0^2+\left(m^2+2\right)\cdot 0-1=$	**2p**
	$=0-0+0-1=-1$, pentru orice număr real m	**3p**

b)	$x_1+x_2+x_3=m+2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m^2+2 \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=-m^2+4m$	**3p**
	$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=$ $=2\left(-m^2+4m-m^2-2\right)=-4(m-1)^2$, pentru orice număr real m	**2p**
c)	$x_1, x_2, x_3\in\mathbb{R}\Rightarrow x_1-x_2, x_2-x_3, x_3-x_1\in\mathbb{R}\Rightarrow(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2\ge 0$, deci $(m-1)^2\le 0$	**2p**
	$m=1$, caz în care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(2e^x\right)'-\left(x^2\right)'-(2x)'-(2)'=$	**2p**
	$=2e^x-2x-2=2\left(e^x-x-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=0$	**3p**
c)	$f''(x)=2\left(e^x-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**1p**
	$x\in(-\infty,0]\Rightarrow f''(x)\le 0$, deci f' este descrescătoare pe $(-\infty,0]$	**1p**
	$x\in[0,+\infty)\Rightarrow f''(x)\ge 0$, deci f' este crescătoare pe $[0,+\infty)$	**1p**
	$f'(x)\ge f'(0)$ și $f'(0)=0$ implică $f'(x)\ge 0$ pentru orice număr real x, deci funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
2.a)	$\int_{-2}^{1}(x+2)^2\,dx=\left.\frac{(x+2)^3}{3}\right\|_{-2}^{1}=$	**3p**
	$=\frac{3^3}{3}-0=9$	**2p**
b)	$\int_0^1(x+2)e^x\,dx=\left.(x+2)e^x\right\|_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=3e-2-\left.e^x\right\|_0^1=$	**3p**
	$=3e-2-e+1=2e-1$	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_{-1}^{1}\|f(x)\|\,dx=\int_{-1}^{1}(x+2)^n\,dx=\left.\frac{(x+2)^{n+1}}{n+1}\right\|_{-1}^{1}=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$	**3p**
	$\frac{3^{n+1}-1}{n+1}=\frac{242}{n+1}\Leftrightarrow 3^{n+1}=243\Leftrightarrow 3^{n+1}=3^5\Leftrightarrow n=4$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $n=\log_3\left(\sqrt{7}-2\right)+\log_3\left(\sqrt{7}+2\right)$ este natural.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+6x+3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+2)^3=(2-x)^3$.

5p **4.** Calculați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{0,2,4,6,8\}$.

5p **5.** Punctele M, N și P verifică relația $2\overrightarrow{MN}+3\overrightarrow{NP}=\vec{0}$. Calculați lungimea segmentului MP, știind că $MN=3$.

5p **6.** Arătați că $\sin x+\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)+\sin(2\pi-x)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & x & y \\ x & 1 & y \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2,3))=12$.

5p **b)** Demonstrați că $\det\left(A\left(n^2,n\right)\right)\geq 0$, pentru orice număr natural n.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care inversa matricei $B=A(x,0)\cdot A(x,0)$ este matricea $A(x,0)$.

2. Se consideră polinomul $f=nX^n+X^2-nX-1$, unde n este număr natural, $n\geq 3$.

5p **a)** Arătați că $f(1)=0$, pentru orice număr natural n, $n\geq 3$.

5p **b)** Arătați că, dacă n este număr natural impar, $n\geq 3$, atunci polinomul f este divizibil cu X^2-1.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr natural n, $n\geq 5$, polinomul f **nu** are rădăcini în mulțimea $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x-x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)+g(x)=\dfrac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arcctg} x+x$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx=\frac{e-1}{e}$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe $(0,+\infty)$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx$. Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n=\log_3\left(\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)\right)=\log_3(7-4)=$	**3p**
	$=\log_3 3=1\in\mathbb{N}$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x-1=x^2+6x+3\Leftrightarrow x^2+4x+4=0$	**2p**
	Coordonatele sunt $x=-2$ și $y=f(-2)=-5$	**3p**
3.	$(x+2)^3=(2-x)^3\Leftrightarrow x+2=2-x$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Cifra zecilor poate fi aleasă în 4 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în 4 moduri, deci se pot forma $4\cdot 4=16$ numere	**3p**
5.	$NP=2$	**2p**
	Punctul P aparține segmentului MN, deci $MP=MN-NP=1$	**3p**
6.	$\sin(\pi-x)=\sin x$, $\sin(\pi+x)=-\sin x$, $\sin(2\pi-x)=-\sin x$	**3p**
	$\sin x+\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)+\sin(2\pi-x)=\sin x+\sin x+(-\sin x)+(-\sin x)=0$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2,3)=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(2,3)\right)=\begin{vmatrix}2&3&1\\1&2&3\\2&1&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=12+1+18-4-6-9=12$	**3p**
b)	$\det\left(A\left(n^2,n\right)\right)=\begin{vmatrix}n^2&n&1\\1&n^2&n\\n^2&1&n\end{vmatrix}=\left(n^2+n+1\right)\begin{vmatrix}1&n&1\\1&n^2&n\\1&1&n\end{vmatrix}=\left(n^2+n+1\right)\begin{vmatrix}1&n&1\\0&n^2-n&n-1\\0&1-n&n-1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=\left(n^2+n+1\right)(n-1)^2(n+1)\geq 0$, pentru orice număr natural n	**2p**
c)	$B=\begin{pmatrix}x^2+x&1&x\\2x&x^2&1\\x^2+1&x&x\end{pmatrix}\Rightarrow B\cdot A(x,0)=A(x,0)\cdot B=\begin{pmatrix}x^3+2x^2+1&2x&x^2+x\\3x^2+x&x^3+1&2x\\x^3+x^2+2x&x^2+x&x^2+1\end{pmatrix}$	**3p**
	Inversa matricei B este matricea $A(x,0)\Leftrightarrow B\cdot A(x,0)=A(x,0)\cdot B=I_3$, deci $x=0$	**2p**
2.a)	$f(1)=n\cdot 1^n+1^2-n\cdot 1-1=$	**3p**
	$=n+1-n-1=0$, pentru orice număr natural n, $n\geq 3$	**2p**

b)	Pentru n număr natural impar, $n \geq 3$, $f(-1) = n \cdot (-1)^n + (-1)^2 - n \cdot (-1) - 1 = 0$, deci polinomul f este divizibil cu $X+1$	**2p**
	$f(1) = 0 \Rightarrow f$ este divizibil cu $X-1$, deci polinomul f este divizibil cu $X^2 - 1$	**3p**
c)	Dacă $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ este o rădăcină a polinomului f care are coeficienții întregi, atunci $\alpha = \frac{1}{d}$, unde $d \in \mathbb{Z}^* \setminus \{\pm 1\}$ este un divizor al lui n	**1p**
	$f(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{n}{d^n} + \frac{1}{d^2} - \frac{n}{d} - 1 = 0 \Rightarrow d^{n-2}\left(d^2 + nd - 1\right) = n \Rightarrow d^{n-2} / n$, deci $\lvert d \rvert^{n-2} \leq n$	**2p**
	Cum $\lvert d \rvert^{n-2} \geq 2^{n-2} > n$ pentru orice număr natural n, $n \geq 5$, obținem o contradicție, deci polinomul f nu are rădăcini în mulțimea $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = (\operatorname{arctg} x)' - (x)' = \frac{1}{x^2+1} - 1 =$	**2p**
	$= \frac{1 - x^2 - 1}{x^2 + 1} = -\frac{x^2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1 \right) = -1$	**2p**
	$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) + x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\operatorname{arctg} x - x + x \right) = \frac{\pi}{2}$, deci dreapta de ecuație $y = -x + \frac{\pi}{2}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f(x) + g(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(f(x) + g(x) \right)' = \frac{1}{x^2+1} + \frac{-1}{x^2+1} = 0$, pentru orice număr real x	**3p**
	Cum $f(0) + g(0) = \frac{\pi}{2}$, obținem că $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right) dx = \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= -\frac{1}{e} + 1 = \frac{e-1}{e}$	**2p**
b)	F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
	$F''(x) = -2x e^{-x^2} < 0$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția F este concavă pe $(0, +\infty)$	**3p**
c)	$I_{n+1} - I_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f(x) dx - \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x) dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x) dx \geq 0$, deci $I_{n+1} \geq I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**1p**
	$0 \leq I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} e^{-x^2} dx \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} 1 dx = 1 - \frac{1}{n} < 1$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
	Șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este monoton și mărginit, deci șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent	**1p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați partea întreagă a numărului real $a=\sqrt[3]{125}+\sqrt{5}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $(f\circ f)(x)=f(x+1)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x+1}\le\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+5}$.

5p **4.** Determinați numărul de submulțimi cu cel puțin trei elemente ale mulțimii $A=\{0,1,2,\ldots,9\}$.

5p **5.** Se consideră triunghiul MNP cu $MN=6$, $MP=8$ și $m(\sphericalangle M)=90^\circ$. Calculați lungimea vectorului $\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$.

5p **6.** Determinaţi numărul real x, știind că $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x+2=0$ și $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 2x-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2x-1 & 0 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x))=0$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)+A(1-x)=2A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1-x)=\frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Pe mulţimea $\mathbb{Z}_{20}=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\ldots,\widehat{19}\}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+\hat{3}x+\hat{3}y+\hat{9}$.

5p **a)** Demonstrați că $x\circ y=(x+\hat{3})(y+\hat{3})$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_{20}$.

5p **b)** Determinați $a\in\mathbb{Z}_{20}$, știind că $a\circ x=\hat{0}$ pentru orice $x\in\mathbb{Z}_{20}$.

5p **c)** Dați exemplu de $a,b\in\mathbb{Z}_{20}\setminus\{\widehat{17}\}$ pentru care $a\circ b=\hat{0}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\frac{7}{2}$.

5p **b)** Determinați imaginea funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $2e^{2x}-e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\ge0$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(\operatorname{tg} x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n+2}\le(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx\le\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2(n+2)}$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a=5+\sqrt{5}$	**2p**
	Cum $2<\sqrt{5}<3$, obținem $[a]=5+\left[\sqrt{5}\right]=7$	**3p**
2.	$(f\circ f)(x)=x+2m$, $f(x+1)=x+1+m$	**2p**
	$x+2m=x+1+m$, deci $m=1$	**3p**
3.	$\left(\frac{2}{3}\right)^{4x+1}\le\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+5}\Leftrightarrow 4x+1\ge 3x+5$	**3p**
	$x\in[4,+\infty)$	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu cel puțin 3 elemente ale mulțimii A este $C_{10}^3+C_{10}^4+\dots+C_{10}^{10}=$	**3p**
	$=2^{10}-C_{10}^0-C_{10}^1-C_{10}^2=1024-1-10-45=968$	**2p**
5.	$\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}$, unde $MNQP$ este paralelogram	**2p**
	$m(\sphericalangle M)=90^\circ$, deci $MNQP$ este dreptunghi și $MQ=NP=10$	**3p**
6.	$\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}+2=0\Leftrightarrow\frac{(\operatorname{tg}x+1)^2}{\operatorname{tg}x}=0$	**2p**
	$\operatorname{tg}x=-1$ și, cum $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, obținem $x=\frac{3\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}x&0&2x-1\\0&\frac{1}{2}&0\\2x-1&0&x\end{vmatrix}=\frac{x^2}{2}+0+0-\frac{(2x-1)^2}{2}-0-0=\frac{-3x^2+4x-1}{2}$	**3p**
	$x=\frac{1}{3}$ sau $x=1$	**2p**
b)	$A(x)+A(1-x)=\begin{pmatrix}x&0&2x-1\\0&\frac{1}{2}&0\\2x-1&0&x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-x&0&1-2x\\0&\frac{1}{2}&0\\1-2x&0&1-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=2A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr real x	**2p**

c)	$\begin{pmatrix} -5x^2+5x-1 & 0 & -4x^2+4x-1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -4x^2+4x-1 & 0 & -5x^2+5x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$	**3p**
	$x=\frac{1}{2}$	**2p**
2.a)	$x\circ y=\left(xy+\hat{3}x\right)+\left(\hat{3}y+\hat{9}\right)=$	**2p**
	$=x\left(y+\hat{3}\right)+\hat{3}\left(y+\hat{3}\right)=\left(x+\hat{3}\right)\left(y+\hat{3}\right)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_{20}$	**3p**
b)	$\left(a+\hat{3}\right)\left(x+\hat{3}\right)=\hat{0}$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_{20}$	**2p**
	$a+\hat{3}=\hat{0}\Rightarrow a=\widehat{17}$	**3p**
c)	$\left(a+\hat{3}\right)\left(b+\hat{3}\right)=\hat{0}$	**2p**
	De exemplu, pentru $a=\hat{1}$ și $b=\hat{2}$, obținem $a+\hat{3}=\hat{4}$ și $b+\hat{3}=\hat{5}$, deci $a\circ b=\hat{0}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{7}{2}$	**3p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$	**1p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$, deci f este descrescătoare pe $\left(0,\frac{1}{4}\right]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$, deci f este crescătoare pe $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$	**2p**
	f continuă pe $(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $f(x)\ge f\left(\frac{1}{4}\right)$ și, cum $f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{8}$, obținem $\operatorname{Im} f=\left[-\frac{3}{8},+\infty\right)$	**2p**
c)	$e^x>0$, deci $f\left(e^x\right)\ge-\frac{3}{8}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$2\left(e^x\right)^2-\sqrt{e^x}\ge-\frac{3}{8}$, deci $2e^{2x}-e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\ge 0$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(\operatorname{tg}x)\,dx=\int_0^1 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)\,dx=\int_0^1 x\,dx=$	**3p**
	$=\left.\frac{x^2}{2}\right\|_0^1=\frac{1}{2}$	**2p**
b)	$\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2+1}dx=\int_0^1(\operatorname{arctg}x)'\operatorname{arctg}x\,dx=\left.\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 1=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=\frac{\pi^2}{32}$	**2p**

c)	$(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^{n+1}\right)'\operatorname{arctg}x\,dx=x^{n+1}\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1-\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx$	**2p**
	$x\in[0,1]\Rightarrow\frac{1}{2}\le\frac{1}{x^2+1}\le1\Rightarrow\frac{1}{2}\int_0^1 x^{n+1}dx\le\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx\le\int_0^1 x^{n+1}dx$ și, cum $\int_0^1 x^{n+1}dx=\frac{1}{n+2}$, obținem $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n+2}\le(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx\le\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2(n+2)}$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1-2i$. Arătați că $z^2-2z+5=0$.

5p **2.** Determinați numerele reale a și b, pentru care graficele funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=bx+2$ se intersectează în punctul $M(2,8)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(4x+5)=1+\log_3(x+3)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele pare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2)$, $B(4,1)$ și $C(0,8)$. Determinați lungimea segmentului CM, știind că M este simetricul punctului A față de punctul B.

5p **6.** Calculați aria paralelogramului $ABCD$, știind că $AB=6$, $AC=10$ și $m(\sphericalangle BAC)=\dfrac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $M(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a+1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=2\\ (a+1)x-y+z=0\\ x+y-az=1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(-1))=0$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(M(a))=0$.

5p **c)** Determinați numerele reale a, știind că sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și $2x_0+y_0z_0=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\dfrac{1}{10}xy-(x+y)+20$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\dfrac{1}{10}(x-10)(y-10)+10$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x\le\dfrac{101}{10}$.

5p **c)** Calculați $\log_2 1*\log_2 2*\log_2 3*\ldots*\log_2 2018$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2+6x-6\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{6x^3}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că valoarea minimă a funcției f este 0.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{f(x)}}{x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+x+1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx=\frac{11}{6}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are exact două puncte de inflexiune.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,dx = 1$.

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2-2z+5=(1-2i)^2-2(1-2i)+5=$	**2p**
	$=1-4i+4i^2-2+4i+5=1-4-2+5=0$	**3p**
2.	$M(2,8)\in G_f \Rightarrow f(2)=8\Rightarrow 4+a=8\Rightarrow a=4$	**3p**
	$M(2,8)\in G_g \Rightarrow g(2)=8\Rightarrow 2b+2=8\Rightarrow b=3$	**2p**
3.	$\log_3(4x+5)=\log_3 3(x+3)\Rightarrow 4x+5=3x+9$	**3p**
	$x=4$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Numărul numerelor naturale de două cifre, care au cifrele pare este egal cu 20, deci sunt 20 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{20}{90}=\dfrac{2}{9}$	**2p**
5.	Punctul B este mijlocul segmentului AM, deci $M(6,0)$	**3p**
	$CM=10$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{ABCD}=2\mathcal{A}_{\Delta ABC}=AB\cdot AC\cdot\sin(\sphericalangle BAC)=6\cdot 10\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=$	**3p**
	$=6\cdot 10\cdot\dfrac{1}{2}=30$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(-1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(M(-1))=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(-1)+0+1-(-1)-0-1=0$	**3p**
b)	$\det(M(a))=\begin{vmatrix}1&1&1\\a+1&-1&1\\1&1&-a\end{vmatrix}=(a+1)(a+2)$, pentru orice număr real a	**3p**
	$a=-2$ sau $a=-1$	**2p**
c)	Sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$ și soluția sistemului este $\left(\dfrac{2a}{(a+1)(a+2)},\dfrac{2a^2+3a+2}{(a+1)(a+2)},\dfrac{1}{a+1}\right)$	**2p**
	$\dfrac{4a}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{2a^2+3a+2}{(a+1)^2(a+2)}=0\Leftrightarrow 6a^2+7a+2=0$, deci $a=-\dfrac{2}{3}$ sau $a=-\dfrac{1}{2}$, care convin	**3p**

2.a)	$x * y = \frac{1}{10}xy - x - y + 10 + 10 =$	**2p**
	$= \frac{1}{10}x(y-10) - (y-10) + 10 = \frac{1}{10}(x-10)(y-10) + 10$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$\frac{1}{10}(x-10)^2 + 10 \le \frac{101}{10} \Leftrightarrow (x-10)^2 \le 1$	**3p**
	$x \in [9,11]$	**2p**
c)	$x * 10 = 10$ și $10 * x = 10$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\log_2 1 * \log_2 2 * \ldots * \log_2 2018 = ((\log_2 1 * \ldots * \log_2 1023) * 10) * \log_2 1025 * \ldots * \log_2 2018 =$ $= 10 * (\log_2 1025 * \ldots * \log_2 2018) = 10$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 6x^2 - 6x + 6 - \frac{6}{x+1} =$	**3p**
	$= \frac{6x^3 + 6x^2 - 6x^2 - 6x + 6x + 6 - 6}{x+1} = \frac{6x^3}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$	**2p**
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$	**1p**
	$f'(x) \le 0$, pentru orice $x \in (-1, 0]$, deci f este descrescătoare pe $(-1, 0]$ și $f'(x) \ge 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, deci f este crescătoare pe $[0, +\infty)$	**2p**
	$f(x) \ge f(0)$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$ și, cum $f(0) = 0$, valoarea minimă a funcției f este 0	**2p**
c)	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^2}{x+1} = 0$	**2p**
	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{f(x)}}{\lvert x \rvert} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{f(x)}}{x} = 0$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x) e^{-x} dx = \int_0^1 (x^2 + x + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 - 0 = \frac{11}{6}$	**2p**
b)	$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x) \Rightarrow F''(x) = (x^2 + 3x + 2)e^x$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
	$F''(-2) = 0$, $F''(-1) = 0$, $F''(x) > 0$ pentru orice $x \in (-\infty, -2)$, $F''(x) < 0$ pentru orice $x \in (-2, -1)$ și $F''(x) > 0$ pentru orice $x \in (-1, +\infty)$, deci F are exact două puncte de inflexiune	**3p**
c)	$\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t f(x) dx = \lim\limits_{t \to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{F'(t)}{1} =$	**3p**
	$= \lim\limits_{t \to 0} f(t) = 1$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul complex z, știind că $2\overline{z}-z=1-3i$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+1$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m, știind că vârful parabolei asociate funcției f se află pe axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\dfrac{\lg x}{\lg(x+2)}=\dfrac{1}{2}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele distincte și impare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-5,2)$ și dreapta d de ecuație $y=x+1$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d.

5p **6.** Arătați că $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix}2m & 1 & 1\\ 1 & 2m & 1\\ 1 & 1 & 2m\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2mx+y+z=-1\\ x+2my+z=0\\ x+y+2mz=1\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(0))=2$.

5p **b)** Determinați numerele reale m, știind că $\det(M(m))=0$.

5p **c)** Pentru $m=-1$, demonstrați că, dacă (a,b,c) este o soluţie a sistemului, cel mult unul dintre numerele a, b și c este întreg.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=4xy+3x+3y+\dfrac{3}{2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=4\left(x+\dfrac{3}{4}\right)\left(y+\dfrac{3}{4}\right)-\dfrac{3}{4}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinaţi numărul real x pentru care $x*x*x=-\dfrac{1}{2}$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale a, ştiind că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ae^x-\dfrac{3}{4}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x^2-\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{(4x-1)(4x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că punctul $A\left(\dfrac{2}{3},3\right)$ aparţine tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\dfrac{1}{3}\right)<f\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)<f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+3}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 (x+3)f(x)\,dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=2-3\ln\dfrac{4}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 e^x(x+3)^n\left(f(x)\right)^n dx$. Demonstrați că $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=a+bi$, $\overline{z}=a-bi \Rightarrow 2\overline{z}-z=a-3bi$, unde a și b sunt numere reale	**3p**
	$a-3bi=1-3i \Rightarrow a=1$ și $b=1$, deci $z=1+i$	**2p**
2.	$y_V=0 \Leftrightarrow \Delta=0$	**3p**
	Cum $\Delta=m^2-4$, obținem $m^2-4=0$, deci $m=-2$ sau $m=2$	**2p**
3.	$2\lg x=\lg(x+2) \Rightarrow x^2-x-2=0$	**3p**
	$x=-1$, care nu convine, $x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Mulțimea numerelor naturale de două cifre, care au cifrele distincte și impare are 20 de elemente, deci sunt 20 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{20}{90}=\dfrac{2}{9}$	**2p**
5.	Panta dreptei d este $m_d=1 \Rightarrow$ panta unei drepte perpendiculare pe dreapta d este $m=-1$	**3p**
	Ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d este $y=-x-3$	**2p**
6.	$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\sin x-\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)=$	**2p**
	$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x-\cos x-\sin x)=0$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+1+1-0-0-0=2$	**3p**
b)	$\det(M(m))=\begin{vmatrix}2m&1&1\\1&2m&1\\1&1&2m\end{vmatrix}=2(m+1)(2m-1)^2$, pentru orice număr real m	**3p**
	$m=-1$ sau $m=\frac{1}{2}$	**2p**
c)	$a-b=\frac{1}{3}$, $b-c=\frac{1}{3}$ și $a-c=\frac{2}{3}$	**3p**
	Deoarece $a-b\notin\mathbb{Z}$, $b-c\notin\mathbb{Z}$ și $a-c\notin\mathbb{Z} \Rightarrow$ cel mult unul dintre numerele a, b și c este întreg	**2p**
2.a)	$x*y=4xy+3x+3y+\frac{9}{4}-\frac{3}{4}=$	**2p**
	$=4x\left(y+\frac{3}{4}\right)+3\left(y+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}=4\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(y+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

b)	$x*x=4\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3}{4}$, $x*x*x=16\left(x+\frac{3}{4}\right)^3-\frac{3}{4}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$16\left(x+\frac{3}{4}\right)^3-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(x+\frac{3}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$, de unde obținem $x=-\frac{1}{2}$	**3p**
c)	$4\left(ae^x-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(ae^y-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}=ae^{x+y}-\frac{3}{4}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$4a^2=a$, deci $a=0$ sau $a=\frac{1}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=16x-\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=\frac{16x^2-1}{x}=\frac{(4x-1)(4x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=8$, $f'(1)=15$, deci ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=15x-7$	**3p**
	$15\cdot\frac{2}{3}-7=3$, deci punctul $A\left(\frac{2}{3},3\right)$ aparține tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f	**2p**
c)	$x\in\left(\frac{1}{4},+\infty\right)\Rightarrow f'(x)>0$, deci f este strict crescătoare pe $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$	**2p**
	Cum $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{\sqrt{7}}<\frac{1}{2}$, obținem $f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1(x+3)f(x)dx=\int_0^1(2x+3)dx=\left(x^2+3x\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=1+3-0=4$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{2x+3}{x+3}dx=\int_0^1\left(2-\frac{3}{x+3}\right)dx=2x\Big\|_0^1-3\ln(x+3)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=2-3(\ln 4-\ln 3)=2-3\ln\frac{4}{3}$	**2p**
c)	$I_n=\int_0^1 e^x(2x+3)^n dx=e^x(2x+3)^n\Big\|_0^1-2n\int_0^1 e^x(2x+3)^{n-1}dx=$	**3p**
	$=e\cdot 5^n-3^n-2nI_{n-1}$, deci $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că numărul $n=\left|1-\sqrt{2}\right|+\left|2-\sqrt{2}\right|$ este natural.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=11-x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=1-11x$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x)\geq g(x)$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x\cdot 2^{x+1}=72$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma folosind doar cifre impare.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,3)$, $B(1,3)$ și $C(1,5)$. Calculați aria triunghiului ABC.
5p	**6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris ΔABC, ştiind că $BC=4$, $B=\frac{\pi}{3}$ și $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x-2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & e^{x-2}\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(2)\right)=1$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y-2)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numerele reale m pentru care $A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(10)=A\left(m^2+m+17\right)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+5X+a$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $f(1)-f(-1)=12$.
5p	**b)** Determinați numărul real a, știind că polinomul f este divizibil cu polinomul $X-2$.
5p	**c)** Determinați numărul real a, știind că toate rădăcinile polinomului f sunt numere întregi.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcţiei f este perpendiculară pe axa Oy.
5p	**c)** Demonstrați că $2^{\sqrt{3}}<3^{\sqrt{2}}$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-x^2$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^3 f(x)\,dx=9$.

5p	**b)** Arătaţi că $\int_1^2 \frac{2-x}{f(x)}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$.
5p	**c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^4 f^n(x)dx$. Demonstraţi că $I_{n+1} \le 4I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left\|1-\sqrt{2}\right\|=\sqrt{2}-1$, $\left\|2-\sqrt{2}\right\|=2-\sqrt{2}$	**2p**
	$n=\sqrt{2}-1+2-\sqrt{2}=1\in\mathbb{N}$	**3p**
2.	$11-x\geq 1-11x \Leftrightarrow 10x\geq -10$	**3p**
	$x\in[-1,+\infty)$	**2p**
3.	$(3\cdot 2)^x\cdot 2=72 \Leftrightarrow 6^x=36$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 5 moduri și, pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor se poate alege în 4 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, cifra unităților se poate alege în 3 moduri, deci se pot forma $5\cdot 4\cdot 3=60$ de numere	**3p**
5.	$AB=4$, $BC=2$	**2p**
	ΔABC este dreptunghic în B, deci $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{2\cdot 4}{2}=4$	**3p**
6.	$A=\pi-\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{2}$	**2p**
	$R=\dfrac{BC}{2}=2$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&e^0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**2p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1&y-2+x-2&0\\0&1&0\\0&0&e^{x-2}\cdot e^{y-2}\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&x+y-4&0\\0&1&0\\0&0&e^{x+y-4}\end{pmatrix}=A(x+y-2)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A(1+2+\ldots+10-2\cdot 9)=A\left(m^2+m+17\right)\Leftrightarrow m^2+m-20=0$	**3p**
	$m=-5$ sau $m=4$	**2p**
2.a)	$f(1)=a+2$	**2p**
	$f(-1)=a-10\Rightarrow f(1)-f(-1)=a+2-a+10=12$	**3p**

b)	Polinomul f este divizibil cu polinomul $X-2 \Leftrightarrow f(2)=0$	**2p**
	$f(2)=a+2$, deci $a=-2$	**3p**
c)	$x_1+x_2+x_3=4$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=5$	**2p**
	$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$ și $x_1^2+x_2^2+x_3^2=6$, deci pătratele rădăcinilor sunt 1, 1 și 4; cum $x_1+x_2+x_3=4$, obținem rădăcinile 1, 1 și 2, deci $a=-2$, care convine	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}\cdot\ln x+\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=-\frac{\ln x}{2x\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este perpendiculară pe axa $Oy \Leftrightarrow f'(a)=0$	**3p**
	$2-\ln a=0 \Leftrightarrow a=e^2$	**2p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(0,e^2)$, deci f este strict crescătoare pe $(0,e^2)$	**2p**
	$0<2<3<e^2 \Rightarrow f(2)<f(3) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\ln 2<\frac{1}{\sqrt{3}}\ln 3 \Rightarrow \sqrt{3}\ln 2<\sqrt{2}\ln 3$, deci $2^{\sqrt{3}}<3^{\sqrt{2}}$	**3p**
2.a)	$\int_0^3 (4x-x^2)\,dx=\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big\vert_0^3=$	**3p**
	$=18-9=9$	**2p**
b)	$\int_1^2 \frac{2-x}{f(x)}\,dx=\int_1^2 \frac{2-x}{4x-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\ln(4x-x^2)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\ln 4-\frac{1}{2}\ln 3=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$	**2p**
c)	$I_{n+1}-4I_n=\int_0^4 f^{n+1}(x)\,dx-4\int_0^4 f^n(x)\,dx=\int_0^4 f^n(x)(4x-x^2-4)\,dx=-\int_0^4 f^n(x)(x-2)^2\,dx$	**3p**
	$f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,4] \Rightarrow f^n(x)(x-2)^2\geq 0$, deci $I_{n+1}-4I_n\leq 0 \Rightarrow I_{n+1}\leq 4I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

5p	**1.** Determinați elementele mulțimii $M=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{3}{x+1}\in\mathbb{N}\right\}$.
5p	**2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-mx-1=0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $\frac{x_1^2-1}{x_1}+\frac{x_2^2-1}{x_2}=2$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2-x}-x=0$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{\log_2 n\,\middle|\,n\in\mathbb{N}^*,\, n\le 20\right\}$, acesta să fie număr natural.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(0,2)$ și $P(1,1)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului MP.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=5\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle A)=45°$ şi $m(\sphericalangle C)=30°$. Determinați lungimea laturii BC.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix}1&2&4\\-1&m&-1\\m&1&3\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y+4z=5\\-x+my-z=-2\\mx+y+3z=4\end{cases}$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(M(0))=3$.
5p	**b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.
5p	**c)** Pentru $m=1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $4y_0^2=(x_0+z_0)^2$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă, cu element neutru, $x*y=\frac{1}{3}xy-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{9}{4}$.
5p	**a)** Demonstrați că $x*y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.
5p	**c)** Demonstrați că **nu** există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziție „$*$” să fie număr natural.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln\left(x^2+x+1\right)$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x(x-1)}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-\frac{1}{7}x+2$.

5p **c)** Demonstrați că pentru fiecare număr natural nenul n, ecuația $f(x)+n=0$ are soluție unică.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 e^x f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$ are aria egală cu $2-\frac{2}{e}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty}(n+2)I_n=\frac{1}{e}$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{3}{x+1}\in\mathbb{N}\Rightarrow x+1=1$ sau $x+1=3$	**3p**
	Elementele mulțimii M sunt 0 și 2	**2p**
2.	$x_1^2-1=mx_1$, $x_2^2-1=mx_2$, pentru orice număr real m	**2p**
	$\frac{mx_1}{x_1}+\frac{mx_2}{x_2}=2$, deci $m=1$	**3p**
3.	$\sqrt{2-x}=x\Rightarrow 2-x=x^2\Rightarrow x^2+x-2=0$	**3p**
	$x=-2$, care nu convine sau $x=1$, care convine	**2p**
4.	În mulțimea A sunt 20 de numere, deci sunt 20 de cazuri posibile	**1p**
	Pentru $n\le 20$, obținem $\log_2 n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n\in\{1,2,4,8,16\}$, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$	**2p**
5.	$m_{MP}=-1$, deci panta mediatoarei segmentului MP este $m=1$	**2p**
	$Q\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ este mijlocul lui MP, deci ecuația mediatoarei este $y-\frac{3}{2}=x-\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=x+1$	**3p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}\Leftrightarrow\frac{5\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	**3p**
	$BC=10$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(0)=\begin{pmatrix}1&2&4\\-1&0&-1\\0&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(M(0))=\begin{vmatrix}1&2&4\\-1&0&-1\\0&1&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+(-4)+0-0-(-6)-(-1)=3$	**3p**
b)	$\det(M(m))=\begin{vmatrix}1&2&4\\-1&m&-1\\m&1&3\end{vmatrix}=-4m^2+m+3$, pentru orice număr real m	**2p**
	$\det(M(m))=0\Leftrightarrow m=-\frac{3}{4}$ sau $m=1$, deci sistemul are soluție unică pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{4},1\right\}$	**3p**
c)	Pentru $m=1$, sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt $(3-2\alpha,1-\alpha,\alpha)$, unde $\alpha\in\mathbb{C}$	**3p**
	$4(1-\alpha)^2=(3-\alpha)^2\Leftrightarrow\alpha=-1$ sau $\alpha=\frac{5}{3}$, deci soluțiile sunt $(5,2,-1)$ sau $\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$	**2p**

2.a)	$x * y = \frac{1}{3}xy - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4} + \frac{6}{4} =$	**2p**
	$= \frac{1}{3}x\left(y - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x * x = \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$, $x * x * x = \frac{1}{9}\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 + \frac{3}{2}$	**2p**
	$\frac{1}{9}\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 + \frac{3}{2} = x \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ sau $x = \frac{3}{2}$ sau $x = \frac{9}{2}$	**3p**
c)	$x * \frac{9}{2} = \frac{9}{2} * x = x$, pentru orice număr real x, deci $e = \frac{9}{2}$ este elementul neutru al legii „$*$”	**2p**
	$n * n' = n' * n = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 4nn' - 6n - 6n' = 27$, unde n' este simetricul lui n și, cum pentru $n, n' \in \mathbb{N}$, numărul $4nn' - 6n - 6n'$ este par, obținem că nu există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziție „$*$” să fie număr natural	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1} =$	**3p**
	$= \frac{x^2 - x}{x^2+x+1} = \frac{x(x-1)}{x^2+x+1}$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = -\frac{1}{7}x + 2 \Leftrightarrow f'(a) = -\frac{1}{7}$	**2p**
	$\frac{a(a-1)}{a^2+a+1} = -\frac{1}{7} \Leftrightarrow 8a^2 - 6a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$ sau $a = \frac{1}{2}$	**3p**
c)	f continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1 - \ln 3 \in (-1, 0)$	**3p**
	f este strict descrescătoare pe $(0,1)$ și f este strict crescătoare pe $(1, +\infty)$, deci, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, ecuația $f(x) + n = 0$ nu are nicio soluție în $[0, +\infty)$	**1p**
	f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0) \Rightarrow$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, ecuația $f(x) + n = 0$ are soluție unică în $(-\infty, 0)$, deci pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, ecuația $f(x) + n = 0$ are soluție unică	**1p**
2.a)	$\int_0^2 e^x f(x)\,dx = \int_0^2 e^x \cdot \frac{x}{e^x}\,dx = \int_0^2 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right\|_0^2 =$	**3p**
	$= 2 - 0 = 2$	**2p**
b)	$\mathcal{A} = \int_{-1}^1 \|f(x)\|\,dx = \int_{-1}^0 -xe^{-x}\,dx + \int_0^1 xe^{-x}\,dx = \left.(x+1)e^{-x}\right\|_{-1}^0 - \left.(x+1)e^{-x}\right\|_0^1 =$	**3p**
	$= 1 - \frac{2}{e} + 1 = 2 - \frac{2}{e}$	**2p**
c)	$(n+2)I_n = (n+2)\int_0^1 x^n f(x)\,dx = (n+2)\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}\,dx = \int_0^1 \left(x^{n+2}\right)' e^{-x}\,dx = \frac{1}{e} + \int_0^1 x^{n+2}e^{-x}\,dx$	**2p**
	$0 \le x \le 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \le e^{-x} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \cdot x^{n+2} \le x^{n+2}e^{-x} \le x^{n+2} \Rightarrow \frac{1}{e}\int_0^1 x^{n+2}\,dx \le \int_0^1 x^{n+2}e^{-x}\,dx \le \int_0^1 x^{n+2}\,dx$	**1p**
	Cum $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 x^{n+2}\,dx = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+3} = 0$, obținem $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 x^{n+2}e^{-x}\,dx = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (n+2)I_n = \frac{1}{e}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $z=(2-i)(3+2i)-4(1+i)$.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care $x^2-(2m+1)x+m(m-1)\geq 0$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\log_2 x-\log_x 2=1$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi A, știind că mulțimea A are exact 16 submulțimi cu cel mult două elemente.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC, punctul M mijlocul laturii BC și punctul N mijlocul segmentului AM. Demonstrați că $2\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

5p **6.** Determinaţi $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, știind că $1+3\cos x=\cos 2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\2&a&4\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=1\\x+2y+az=2\\2x+ay+4z=3\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=a(3-a)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a=0$, demonstrați că sistemul de ecuații este incompatibil.

5p **c)** Determinați numerele întregi a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x\circ y=\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)-1}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați perechile de numere naturale a și b, știind că $a\circ b=1$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, numărul $\underbrace{1\circ 1\circ\ldots\circ 1}_{1 \text{ de } n \text{ ori}}$ **nu** este natural.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$.

5p **a)** Calculați $\int_1^2 \frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}dx$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{4}$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\int_0^t f(x)dx$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=6-3i+4i-2i^2-4-4i=4-3i$	**3p**
	$\lvert z\rvert=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$	**2p**
2.	$\Delta=(2m+1)^2-4m(m-1)=8m+1$	**2p**
	$\Delta\le 0$, deci $m\in\left(-\infty,-\frac{1}{8}\right]$	**3p**
3.	$2\log_2 x-\frac{1}{\log_2 x}=1\Rightarrow(2\log_2 x+1)(\log_2 x-1)=0$	**3p**
	$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $x=2$, care convin	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu cel mult două elemente ale mulțimii A este $C_n^0+C_n^1+C_n^2$, unde n este numărul de elemente ale mulțimii A	**3p**
	$1+n+\frac{n(n-1)}{2}=16$ și, cum n este număr natural, obținem $n=5$	**2p**
5.	M mijlocul laturii $BC\Rightarrow\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{MN}$	**2p**
	N mijlocul segmentului AM, deci $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NA}$, deci $2\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{NA}=\vec{0}$	**3p**
6.	$1+3\cos x=2\cos^2 x-1\Leftrightarrow 2\cos^2 x-3\cos x-2=0\Leftrightarrow(\cos x-2)(2\cos x+1)=0$	**3p**
	$\cos x=-\frac{1}{2}$ și, cum $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, obținem $x=\frac{2\pi}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&a\\2&a&4\end{vmatrix}=8+a+2a-4-a^2-4=$	**3p**
	$=-a^2+3a=a(3-a)$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$\det(A(0))=0$ și un minor principal este $\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}\ne 0$	**2p**
	Minor caracteristic este $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&2\\2&0&3\end{vmatrix}=3\ne 0$, deci sistemul de ecuații este incompatibil	**3p**

c)	Sistemul are soluție unică $(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow a \in \mathbb{Z} \setminus \{0,3\}$ și soluția sistemului este $\left(1-\frac{2}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$	**3p**
	x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi, deci $\frac{1}{a}$ este număr întreg și, cum și a este număr întreg, obținem $a=-1$ sau $a=1$, care convin	**2p**
2.a)	$x \circ y = \sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1-1} =$	**2p**
	$=\sqrt{x^2\left(y^2+1\right)+\left(y^2+1\right)-1} = \sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)-1}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)-1} = 1 \Leftrightarrow \left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)=2$	**2p**
	Cum a și b sunt numere naturale, obținem $a=1$, $b=0$ sau $a=0$, $b=1$	**3p**
c)	$\underbrace{1 \circ 1 \circ \ldots \circ 1}_{1 \text{ de } n \text{ ori}} = \sqrt{2^n-1}$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**2p**
	Dacă $\sqrt{2^n-1} \in \mathbb{N}$, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^n-1=k^2 \Rightarrow k$ impar, deci există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^n-1=(2m+1)^2$, de unde obținem $2^{n-1}=2m^2+2m+1$, ceea ce este imposibil, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}} - 1 =$	**3p**
	$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 1 = \frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-1+\frac{1}{x}\right)}{x} = -2$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+2x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x+1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}-x-1} = 0$, deci dreapta de ecuație $y=-2x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$\sqrt{x^2+2x+2} > x+1 \Rightarrow f'(x) < 0$, pentru orice număr real x, deci funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
	f continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, deci $\operatorname{Im} f = (2,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_1^2 \frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}dx = \int_1^2\left(3x^2-2x\right)dx = \left(x^3-x^2\right)\Big\|_1^2 =$	**3p**
	$=8-4-1+1=4$	**2p**
b)	$\int_0^1 x\ln(x+1)dx = \int_0^1\left(\frac{x^2-1}{2}\right)'\ln(x+1)dx = \frac{x^2-1}{2}\ln(x+1)\Big\|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1(x-1)dx =$	**3p**
	$=-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big\|_0^1 = \frac{1}{4}$	**2p**
c)	$\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t^3}\int_0^t f(x)dx = \lim\limits_{t\to0}\frac{f(t)}{3t^2} =$	**3p**
	$=\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(t+1)}{3t} = \frac{1}{3}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1=3-i$ și $z_2=8-3i$. Arătați că $3z_1-z_2=1$.

5p **2.** Determinați numărul real a pentru care $f(a)+f(a+1)=35$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-5$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\cdot 4^x-4^{x+1}+32=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice relația $n(n+1)\geq 42$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(8,4)$, $B(0,6)$ și $C(m,5)$. Determinați numărul real m, știind că $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.

5p **6.** Calculați lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, știind că $AB=6$ și aria triunghiului ABC este egală cu 24.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln(a+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real, $a>0$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=A(ab+a+b)$, pentru orice numere reale a și b, $a>0$, $b>0$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>0$, știind că $A(a)A(a)A(a)=A(7)$.

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3+mX^2-mX+2$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m, știind că $f(-2)=0$.

5p **b)** Pentru $m=1$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Se consideră $a=\dfrac{x_1^2+mx_1}{x_2x_3}+\dfrac{x_2^2+mx_2}{x_1x_3}+\dfrac{x_3^2+mx_3}{x_1x_2}$. Demonstrați că $a\in[3,+\infty)$, pentru orice număr real m.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2+4x+1\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x(x+5)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care ecuația $f(x)=a$ are exact trei soluții reale.

2. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$.

5p **a)** Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{1}{x}f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>e$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=e$ și $x=a$ are aria egală cu $2a$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3z_1 - z_2 = 3(3-i) - (8-3i) =$	**2p**
	$= 9 - 3i - 8 + 3i = 1$	**3p**
2.	$a - 5 + (a+1) - 5 = 35$	**2p**
	$2a - 9 = 35 \Rightarrow a = 22$	**3p**
3.	$4^x(2-4) + 32 = 0 \Leftrightarrow 4^x = 16$	**3p**
	$x = 2$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de o cifră care verifică relația sunt 6, 7, 8 și 9, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, deci punctul C este mijlocul segmentului AB	**2p**
	$m = 4$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \dfrac{AB \cdot AC}{2} \Rightarrow 24 = \dfrac{6 \cdot AC}{2} \Rightarrow AC = 8$	**3p**
	$BC = 10$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 2$	**3p**
b)	$A(a)A(b) = \begin{pmatrix} (a+1)(b+1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln((a+1)(b+1)) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= \begin{pmatrix} (ab+a+b)+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln((ab+a+b)+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(ab+a+b)$, pentru orice numere reale a și b, $a > 0$, $b > 0$	**2p**
c)	$A(a)A(a) = A\left((a+1)^2 - 1\right)$, $A(a)A(a)A(a) = A\left((a+1)^3 - 1\right)$, pentru a număr real, $a > 0$	**2p**
	$(a+1)^3 - 1 = 7 \Leftrightarrow (a+1)^3 = 8$, deci $a = 1$	**3p**
2.a)	$f(-2) = 6m - 6$, pentru m număr real	**3p**
	$6m - 6 = 0 \Rightarrow m = 1$	**2p**

b)	$f = X^3 + X^2 - X + 2 = (X+2)\left(X^2 - X + 1\right)$	**2p**
	$x_1 = -2$, $x_2 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$	**3p**
c)	$x_1 + x_2 + x_3 = -m$, $x_1x_2x_3 = -2$	**2p**
	$a = \dfrac{x_1^3 + mx_1^2}{x_1x_2x_3} + \dfrac{x_2^3 + mx_2^2}{x_1x_2x_3} + \dfrac{x_3^3 + mx_3^2}{x_1x_2x_3} = \dfrac{mx_1 - 2}{x_1x_2x_3} + \dfrac{mx_2 - 2}{x_1x_2x_3} + \dfrac{mx_3 - 2}{x_1x_2x_3} = \dfrac{m(x_1+x_2+x_3) - 6}{x_1x_2x_3} =$ $= \dfrac{m^2+6}{2} \geq 3$, deci $a \in [3, +\infty)$, pentru orice număr real m	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = e^x\left(x^2 + 4x + 1\right) + e^x(2x+4) =$	**3p**
	$= e^x\left(x^2 + 6x + 5\right) = e^x(x+5)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în $\left(x_0, f(x_0)\right)$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$	**2p**
	$e^{x_0}(x_0+5)(x_0+1) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -5$ sau $x_0 = -1$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $f(-5) = \dfrac{6}{e^5}$, $f(-1) = -\dfrac{2}{e}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	**2p**
	Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$ și f este strict monotonă pe $(-\infty, -5)$, pe $(-5, -1)$ și pe $(-1, +\infty)$, ecuația $f(x) = a$ are exact trei soluţii reale $\Leftrightarrow a \in \left(0, \dfrac{6}{e^5}\right)$	**3p**
2.a)	F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$, $x \in (1, +\infty)$	**2p**
	$F'(x) > 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$, deci F este strict crescătoare pe intervalul $(1, +\infty)$	**3p**
b)	$\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x} f(x)\,dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}\,dx = \ln(\ln x)\Big\vert_e^{e^2} =$	**3p**
	$= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$	**2p**
c)	$g(x) = \ln x \Rightarrow \mathcal{A} = \displaystyle\int_e^a \lvert g(x)\rvert\,dx = \int_e^a \ln x\,dx = x\ln x\Big\vert_e^a - \int_e^a x\cdot\frac{1}{x}\,dx = a\ln a - a$	**3p**
	$a\ln a - a = 2a$ și, cum $a > e$, obținem $a = e^3$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că numărul $n=\left(3-i\sqrt{2}\right)\left(3+i\sqrt{2}\right)$ este întreg, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,3)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2019^x+2019^{-x}=2$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților impară.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,-3)$ și $B(2,-2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin A și este perpendiculară pe AB.
5p	**6.** Arătați că $\sin(a-b)\sin(a+b)=(\sin a-\sin b)(\sin a+\sin b)$, pentru orice numere reale a și b.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(a))=0$, pentru orice număr real a.
5p	**b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=2A(ab)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Demonstrați că matricea $B=A(\log_2 3)\cdot A(\log_3 4)\cdot A(\log_4 5)\cdot\ldots\cdot A(\log_{15}16)$ are toate elementele numere întregi.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX+n$, unde m și n sunt numere reale.
5p	**a)** Arătați că $f(-1)-2f(0)+f(1)=2$, pentru orice numere reale m și n.
5p	**b)** Determinați numerele reale m și n, știind că polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-1.
5p	**c)** Demonstrați că $3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3)-\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)=1$, pentru orice numere reale m și n, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^{-x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=x(2-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că, pentru orice $a\in\left(0,4e^{-2}\right)$, ecuația $f(x)=a$ are exact trei soluții reale.
	2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\ln x\right)dx=\frac{7}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-x^2+f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria egală cu e^2.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{e^{-1}}^{1} x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=0$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n=3^2-\left(i\sqrt{2}\right)^2=$	**2p**
	$=9-2i^2=11\in\mathbb{Z}$	**3p**
2.	$f(a)=3\Rightarrow 2a+a=3$	**3p**
	$a=1$	**2p**
3.	$2019^x+2019^{-x}-2=0\Leftrightarrow\left(2019^x-1\right)^2=0$	**3p**
	$2019^x=1$, deci $x=0$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de două cifre care au cifra unităților impară are 45 de elemente, deci sunt 45 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{45}{90}=\dfrac{1}{2}$	**1p**
5.	$m_{AB}=-1\Rightarrow m_d=1$	**2p**
	Ecuația dreptei d este $y-y_A=m_d\left(x-x_A\right)$, deci $y=x-6$	**3p**
6.	$\sin(a-b)\sin(a+b)=\sin^2 a\cdot\cos^2 b-\sin^2 b\cdot\cos^2 a=$	**2p**
	$=\sin^2 a\left(1-\sin^2 b\right)-\sin^2 b\left(1-\sin^2 a\right)=\sin^2 a-\sin^2 b=(\sin a-\sin b)(\sin a+\sin b)$, pentru orice numere reale a și b	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2a^2+0+0-2a^2-0-0=0$, pentru orice număr real a	**3p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix} 2ab & 0 & -2ab \\ 0 & 4 & 0 \\ -2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix} ab & 0 & -ab \\ 0 & 2 & 0 \\ -ab & 0 & ab \end{pmatrix}=2A(ab)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$B=2^{13}A\left(\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{15}16\right)=2^{13}A\left(\log_2 16\right)=$	**3p**
	$=2^{13}A(4)$, care are toate elementele numere întregi	**2p**

2.a)	$f(-1)=-m+n$, $f(0)=n$	**2p**
	$f(1)=2+m+n \Rightarrow f(-1)-2f(0)+f(1)=-m+n-2n+2+m+n=2$, pentru orice numere reale m și n	**3p**
b)	f este divizibil cu $X^2-1 \Leftrightarrow f(-1)=0$ și $f(1)=0$	**3p**
	$m=-1$, $n=-1$	**2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=-1$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m$, $x_1x_2x_3=-n$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-1+3m-3n$	**3p**
	$3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3)-\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)=3(m-n)-(-1+3m-3n)=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=$	**3p**
	$=\left(2x-x^2\right)e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ sau $x=2$	**2p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty,0]$, $f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[0,2]$, deci f este crescătoare pe $[0,2]$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty)$, deci f este descrescătoare pe $[2,+\infty)$	**3p**
c)	$f(0)=0<a$, $f(2)=4e^{-2}>a$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0<a$, pentru orice $a\in\left(0,4e^{-2}\right)$	**3p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, f este continuă pe $\mathbb{R}$ și f este strict monotonă pe $(-\infty,0)$, pe $(0,2)$ și pe $(2,+\infty)$, ecuația $f(x)=a$ are exact trei soluții reale	**2p**
2.a)	$\int_1^2 (f(x)-\ln x)\,dx=\int_1^2 x^2\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_1^2=$	**3p**
	$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$	**2p**
b)	$g(x)=2x+\ln x \Rightarrow \mathcal{A}=\int_1^e \|g(x)\|\,dx=\int_1^e (2x+\ln x)\,dx=\left.x^2\right\|_1^e+\left.x\ln x\right\|_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx=$	**3p**
	$=e^2-1+e-0-(e-1)=e^2$	**2p**
c)	$\int_{e^{-1}}^1 x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=\int_{e^{-1}}^1 x^n\ln x\,dx=\left.\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right)\right\|_{e^{-1}}^1=\frac{1}{(n+1)e^{n+1}}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2e^{n+1}}$	**3p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{e^{-1}}^1 x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)e^{n+1}}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2e^{n+1}}\right)=0$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că suma elementelor mulțimii $A=\{n\in\mathbb{N} \mid n-1\le 4\}$ este egală cu 15.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că vârful parabolei asociate funcției f are ordonata egală cu 2.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+3}=\sqrt{9-x}$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu cel puțin 8 elemente ale unei mulțimi cu exact 10 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,1)$, $B(-1,3)$ și $C(8,10)$. Determinaţi lungimea segmentului CD, unde punctul D este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Arătați că $1+\cos\pi+\cos 2\pi+\cos 3\pi+\ldots+\cos 2019\pi=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a+1&0&0\\1&a&1\\0&0&a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\big(A(1)\big)=4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=ab\,I_3+(a+b+1)A(0)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A(0)A(1)A(2)\ldots A(2019)=n!A(0)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-mX^2+2X+3-m$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m, știind că $f(1)=0$.

5p **b)** Pentru $m=3$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-12$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{2}{x+1}-\ln\dfrac{x}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Se consideră funcțiile $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ și $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\ln\dfrac{x}{x+1}$. Demonstraţi că graficele funcţiilor g și h **nu** au niciun punct comun.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{13}{3}$.

5p **b)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\,f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$, are aria egală cu $\dfrac{10\sqrt{5}-16}{3}$.

5p **c)** Calculați $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^3 f(t)\,dt$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n \le 5 \Rightarrow A = \{0,1,2,3,4,5\}$	**3p**
	Suma elementelor mulțimii A este $0+1+2+3+4+5=15$	**2p**
2.	$\Delta = 4-4m$	**2p**
	$\frac{4m-4}{4}=2$, de unde obținem $m=3$	**3p**
3.	$x+3=9-x \Rightarrow 2x=6$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	O mulțime cu 10 elemente are $C_{10}^8+C_{10}^9+C_{10}^{10}$ submulțimi cu cel puțin 8 elemente	**3p**
	$C_{10}^8+C_{10}^9+C_{10}^{10}=45+10+1=56$	**2p**
5.	$D(2,2)$	**2p**
	$CD=10$	**3p**
6.	$\cos 2k\pi = 1$ și $\cos(2k+1)\pi=-1$, unde $k \in \mathbb{Z}$	**2p**
	$1+\cos\pi+\cos 2\pi+\cos 3\pi+\ldots+\cos 2019\pi = 1+(-1)+1+(-1)+1+\ldots+(-1)+1+(-1)=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\0&0&2\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2&0&0\\1&1&1\\0&0&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4+0+0-0-0-0=4$	**3p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}ab+a+b+1&0&0\\a+b+1&ab&a+b+1\\0&0&ab+a+b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab&0&0\\0&ab&0\\0&0&ab\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a+b+1&0&0\\a+b+1&0&a+b+1\\0&0&a+b+1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=ab\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+(a+b+1)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=abI_3+(a+b+1)A(0)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(0)A(a)=(a+1)A(0)$, pentru orice număr real a	**2p**
	$A(0)A(1)A(2)\ldots A(2019)=2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2020A(0)$, de unde obținem $n=2020$	**3p**
2.a)	$f(1)=6-2m$	**3p**
	$6-2m=0 \Rightarrow m=3$	**2p**
b)	$f=X^3-3X^2+2X=X\left(X^2-3X+2\right)$	**2p**
	Rădăcinile sunt $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$	**3p**

c)	$x_1+x_2+x_3=m$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2$, deci $x_1^3+x_2^3+x_3^3=m^3-3m-9$	**3p**
	$m^3-3m-9=m^3-12$, de unde obținem $m=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-2\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)-\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=$	**2p**
	$=\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{x(x+1)}=\frac{2x-(x+1)}{x(x+1)^2}=\frac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}-\ln\frac{x}{x+1}\right)=1-0-0=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,1]$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)\Rightarrow f(x)\ge f(1)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$f(1)=\ln 2>0$, deci $f(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$ și, cum $g(x)=h(x)\Leftrightarrow f(x)=0$, ecuația $g(x)=h(x)$ nu are soluție în $(0,+\infty)$, deci graficele funcțiilor g și h nu au niciun punct comun	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f^2(x)dx=\int_0^1\left(x^2+4\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+4x\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}+4-0=\frac{13}{3}$	**2p**
b)	$g(x)=x\sqrt{x^2+4}\Rightarrow\mathcal{A}=\int_{-1}^1\left\|g(x)\right\|dx=-\int_{-1}^0 x\sqrt{x^2+4}\,dx+\int_0^1 x\sqrt{x^2+4}\,dx=$	**2p**
	$=-\frac{1}{3}\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}\Big\|_{-1}^0+\frac{1}{3}\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}\Big\|_0^1=-\frac{1}{3}\left(8-5\sqrt5\right)+\frac{1}{3}\left(5\sqrt5-8\right)=\frac{10\sqrt5-16}{3}$	**3p**
c)	Din teorema lui l'Hospital, $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^3f(t)dt=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3f(x)}{4x^3}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}}{4}=\frac{1}{2}$	**2p**